Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Taxas de Decaimento para Fluidos Magneto-Micropolares

Cilon Perusato[1]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, PPGMAp, UFRGS, Porto Alegre, RS
Robert Guterres[2]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, PPGMAp, UFRGS, Porto Alegre, RS

**Resumo**. Considere $(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})(\cdot, t)$, solução de Leray da equação MHD micropolar com dados iniciais em $L^2$. Neste trabalho provamos que $\|(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ ao $t \to \infty$, com o fato adicional de que $\|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-1/2})$. Além disso, foi possível generalizar as técnicas apresentadas em [15] para a equação de Navier-Stokes e, mais recentemente, em [4] para o sistema MHD, para mostrar que $t^{s/2}\|(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \to 0$ , novamente com o fato adicional de que $t^{(s+1)/2}\|\mathbf{w}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s} \to 0$ ao $t \to \infty$ para todo $s \geq 0$. A partir daí foi possível obter algumas interessantes consequências, como por exemplo: $t^{3/4-3/2q}\|(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \to 0$, para $2 \leq q \leq \infty$.

**Palavras-chave**. Decaimento assintótico, MHD Micropolar, Estimativas $L^p$, Estimativas $\dot{H}^s$ .

## 1 Introdução

Em seu célebre artigo [8], de 1934, Leray construiu soluções (fracas) globais de energia finita $\boldsymbol{u}(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap C_w([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ para as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^3$. Tais soluções (fracas) de Leray podem ser construídas de maneira análoga para os seguinte sistema MHD Micropolar:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \nabla P = (\mu + \chi)\, \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{b} + \chi\, \nabla \wedge \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \mathbf{w} = \gamma\, \Delta \mathbf{w} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \chi\, \nabla \wedge \boldsymbol{u} - 2\,\chi\, \mathbf{w}, \\ \boldsymbol{b}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{b} = \nu\, \Delta \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla \boldsymbol{u}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\cdot, t) = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{b}(\cdot, t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

obtendo assim, as mesmas importantes propriedades existentes para a equação de Navier-Stokes. Como por exemplo, a existência de $t_* > 0$ suficientemente grande, tal que

$$(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (t_*, \infty)). \tag{2}$$

No sistema (1), $(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})$ são a velocidade do fluido, a velocidade microrrotacional e o campo magnético, respectivamente. $P$ é a pressão total e $\mu, \chi, \gamma, \nu$ são constantes positivas.

Um problema básico importante deixado aberto por Leray em 1934 foi (denotando $W(t) := \|\, \boldsymbol{u}(\cdot, t)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, como em [8]):

*J'ignore si W(t) tend nécessairement vers* 0 *quand* $t$ *augmente indéfiniment,*

J. Leray ( [8], p. 248)

[1]cilonperusato@gmail.com
[2]rguterres.mat@gmail.com

 

ou seja, se vale (ou não) que

$$\lim_{t \to \infty} \| \boldsymbol{u}(\cdot, t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{3}$$

Esta questão somente foi resolvida (positivamente) 50 anos mais tarde por Kato [6] e subsequentemente também por outros autores [5, 9, 17]. Vários desenvolvimentos e extensões importantes de (3) vem sendo estabelecidos (ver e.g. [2,7,10,13,14] ) e até mesmo para o sistema MHD, veja [1] e [16]. Mais especificamente, os autores [14] provaram o mesmo resultado usando uma técnica diferente e, a partir daí, conseguiram responder outras questões (mais gerais) de decaimento assintótico como, por exemplo,

$$\lim_{t\to\infty} t^{3/4} \|\boldsymbol{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Um ponto chave para responder estas questões, como veremos mais adiante, é analisar o comportamento das derivadas de primeira ordem. Com isso, mais recentemente em [4], os autores estenderam tais técnicas para o sistema MHD, obtendo

$$\lim_{t\to\infty} t^{s/2} \|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{4}$$

para todo $s \geq 0$, e em particular,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{3}{4} - \frac{3}{2q}} \|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{5}$$

$2 \leq q \leq \infty$. A partir daí , foi possível obter para o sistema magneto micropolar as propriedades (4) e (5) com o ganho adicional de que a velocidade microrrotacional $\mathbf{w}$ decai com uma taxa de $t^{1/2}$ em $L^2$. Em outras palavras:

**Teorema 1.1.** *Dada $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b})$ soluções de Leray do sistema (1), tem-se*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0, \\ &\lim_{t\to\infty} t^{1/2} \|\boldsymbol{w}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

E, mais geralmente:

**Teorema 1.2.** *Dada $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b})$ soluções de Leray do sistema (1), tem-se*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} t^{s/2} \|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = 0, \\ &\lim_{t\to\infty} t^{s/2+1/2} \|\boldsymbol{w}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

**Notação.** Como já visto acima, usaremos (em geral) letras em negrito para grandezas vetoriais, e.g. $\boldsymbol{u}(x, t) = (u_1(x, t), ..., u_n(x, t))$, denotando por $|\cdot|_2$ (ou simplesmente $|\cdot|$) a norma Euclideana em $\mathbb{R}^n$, ver e.g. (1.7). Como é usual, $\nabla p \equiv \nabla p(\cdot, t)$ denota o gradiente (espacial) de $p(\cdot, t)$, $D_j = \partial/\partial x_j$, e $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = D_1 u_1 + ... + D_n u_n$) é o divergente (espacial) de $\boldsymbol{u}(\cdot, t)$; analogamente, $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = u_1 D_1 \boldsymbol{u} + ... + u_n D_n \boldsymbol{u}$, $\| \cdot \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, $1 \leq q \leq \infty$, denota a norma tradicional do espaço de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$, pondo-se, para $1 \leq q < \infty$:



DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0439  

$$\| \boldsymbol{u}(\cdot,t) \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \;=\; \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} | \, u_i(x,t) \, |^q \, dx \Big\}^{1/q} \tag{8a}$$

$$\| \, D\boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \;=\; \Big\{ \sum_{i,\,j\,=\,1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} | \, D_j \, u_i(x,t) \, |^q \, dx \Big\}^{1/q} \tag{8b}$$

$$\| \, D^2\boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \;=\; \Big\{ \sum_{i,\,j,\,\ell\,=\,1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} | \, D_j \, D_\ell \, u_i(x,t) \, |^q \, dx \Big\}^{1/q} \tag{8c}$$

e, mais geralmente, para $m \geq 1$ inteiro:

$$\| \, D^m \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \Big( \sum_{i\,=\,1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_m=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} | \, D_{j_1} \cdots D_{j_m} u_i(x,t) \, |^q \, dx \Big)^{1/q}, \tag{8d}$$

Definiremos também, por conveniência:

$$\|(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})\|^q_{L^q(\mathbb{R}^3)} = \|\boldsymbol{u}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{w}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{b}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^3)} \tag{8e}$$

denotando-se por $\| \, \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \max \big\{ \, \| \, u_i(\cdot,t) \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \colon \, 1 \leq i \leq n \, \big\}$ o supremo (essencial) de $\boldsymbol{u}(\cdot,t)$, e similarmente para $\| \, D\,\boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $\| \, D^2 \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, etc. Com estas definições, tem-se $\| \, \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to \| \, \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ao $q \to \infty$, assim como, mais geralmente, $\| \, D^m \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to \| \, D^m \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, para todo $m$.[3] É conveniente, também, definir as normas $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$:

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\hat{u}_i(\xi)|^2 d\xi,$$

$$\|(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} = \|\boldsymbol{u}\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{w}\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{b}\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)},$$

onde $\hat{u}_i$ denota a transformada de Fourier de $u_i$. Constantes serão usualmente representadas pelas letras $C$,$c$,$K$; escrevemos $C(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ para observar que o valor da constante $C$ em questão depende apenas dos parâmetros $\{ \lambda_1, ..., \lambda_k \}$ indicados (a menos que explicitamente mencionado em contrário). Por conveniência e economia, usamos tipicamente o mesmo símbolo para denotar constantes com diferentes valores numéricos (por exemplo, escrevemos $C^2$ ou $10\,C+1$, cosh $C$, etc, novamente como $C$, e assim por diante), como usualmente feito na literatura. Além disso, denotaremos por $e^{\Delta\tau} f$ a solução da equação do calor com dado inicial $f$, i.e., é a convolução entre o *Heat kernel* e a função $f$.

[3] Mais seriamente, convém observar que, com as definições (8), se uma desigualdade de tipo Nirenberg-Gagliardo $\| \, u \, \|_{L^q} \leq K \, \| \, u \, \|^{1-\theta}_{L^{r_1}} \| \, \nabla u \, \|^{\theta}_{L^{r_2}}$, $0 \leq \theta \leq 1$, valer para funções *escalares* $u$ ($K > 0$ constante), então ela será automaticamente válida para funções *vetoriais* $\boldsymbol{u}$ com a *mesma* constante $K$ do caso escalar. Ademais, tem-se $\| \, D^m \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|_{L^q} \leq \| \, D^m \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|^{1-\theta}_{L^{q_1}} \| \, D^m \boldsymbol{u}(\cdot,t) \, \|^{\theta}_{L^{q_2}}$ se $1/q = (1-\theta)/q_1 + \theta/q_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, e assim por diante.



DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0439  

## 2 Prova do Teorema (1.1)

Primeiramente, note que, dada uma solução de Leray $(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})$ do problema (1) e $t_0 > t_*$, (veja 2), tem-se

$$\begin{aligned}\| (\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})(\cdot,t) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\mu \int_{t_0}^{t} \|D\boldsymbol{u}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau + 2\gamma \int_{t_0}^{t} \|D\mathbf{w}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \\ + 2\nu \int_{t_0}^{t} \|D\boldsymbol{b}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau + 2\chi \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{w}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau + 2 \int_{t_0}^{t} \|\nabla \cdot \mathbf{w}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau \\ \leq \| (\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})(\cdot,t_0) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},\end{aligned} \tag{9}$$

para todo $t > t_0$. Para obter (9), basta tomarmos o produto interno de $(\boldsymbol{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{b})$ com o sistema (1) e integrar na região[4] $[t_0, t] \times \mathbb{R}^3$. De forma semelhante, adaptando o argumento apresentado em [7] é possível mostrar que existe $t_{**} > t_*$ suficientemente grande tal que, dado $t_0 > t_{**}$,

$$\begin{aligned}\|(D\boldsymbol{u}, D\mathbf{w}, D\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\min(\mu,\gamma,\nu) \int_{t_0}^{t} \|(D^2\boldsymbol{u}, D^2\mathbf{w}, D^2\boldsymbol{b})(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau \\ +2\chi \int_{t_0}^{t} \|D\mathbf{w}(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau + 2 \int_{t_0}^{t} \|D(\nabla \cdot\ \mathbf{w}(\cdot,\tau))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau \leq \|(D\boldsymbol{u}, D\mathbf{w}, D\boldsymbol{b})(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},\end{aligned} \tag{10}$$

$\forall\, t > t_0$. Pela desigualdade (9) tem-se que

$$\int_{t_0}^{t} \|(D\boldsymbol{u}, D\mathbf{w}, D\boldsymbol{b})(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, d\tau < \infty.$$

Por (10), $\|(D\boldsymbol{u}, D\mathbf{w}, D\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|(D\boldsymbol{u}, D\mathbf{w}, D\boldsymbol{b})(\cdot,t_0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Logo[5],

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/2} |(D\boldsymbol{u}, D\mathbf{w}, D\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{11}$$

Dado $\epsilon > 0$. Seja $Q_2(\cdot,t) = -\boldsymbol{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \chi \nabla \wedge \boldsymbol{u}$. Fazendo a mudança de variável $\mathbf{z}(\cdot,t) = e^{2\chi t}\mathbf{w}(\cdot,t)$, aplicando o princípio de Duhamel para a nova função $\mathbf{z}$, reescrevendo para a função $\mathbf{w}(\cdot,t)$, tem-se

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq t^{\frac{1}{2}} e^{-2\chi(t-t_0)} \|e^{\gamma\Delta(t-t_0)}\mathbf{w}(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &+ t^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \boldsymbol{u} \cdot \nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &+ t^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds \\ &+ \chi t^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2\chi(t-s)} \|e^{\gamma\Delta(t-s)} \nabla \wedge \boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned} \tag{12}$$

Como $t^{1/2} e^{-2\chi(t-t_0} \|e^{\gamma(t-t_0)}\mathbf{w}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$, para $t \to \infty$, vamos estimar o segundo termo do

[4] Para maiores detalhes, veja [12].

[5] Pois uma função monótona $f \in C^0((a,\infty)) \cap L^1((a,\infty))$ tem que satisfazer $f(t) = o(1/t)$ ao $t \to \infty$.



DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0439 010439-4 

lado direito da desigualdade anterior. Observe que, usando (11), tem-se

$$\begin{aligned} & t^{1/2}\int_{t_0}^{t} e^{-2\chi(t-s)}\|e^{\gamma\Delta(t-s)}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds \\ \leq{}& K\gamma^{-3/4}t^{1/2}\int_{t_0}^{t} e^{-2\chi(t-s)}(t-s)^{-3/4}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds \\ \leq{}& K\epsilon\gamma^{-3/4}\|(\boldsymbol{u},\mathbf{w})(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}t^{1/2}\int_{t_0}^{t} e^{-2\chi(t-s)}(t-s)^{-3/4}s^{-1/2}ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & t^{1/2}\int_{t_0}^{t} e^{-2\chi(t-s)}(t-s)^{-3/4}s^{-1/2}ds \\ \leq{}& t^{1/2}e^{-\chi t}\left(\frac{t}{2}\right)^{-3/4}\int_{t_0}^{\frac{t}{2}} s^{-1/2}ds + t^{1/2}t^{-1/2}\int_{\frac{t}{2}}^{t} e^{-2\chi(t-s)}(t-s)^{-3/4}ds \\ \leq{}& e^{-\chi t}t^{1/4} + (2\chi)^{-1/4}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{-3/4}d\tau \\ \leq{}& e^{-\chi t}t^{1/4} + (2\chi)^{-1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

De modo que, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, tem-se

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/2}\int_{t_0}^{t} e^{-2\chi(t-s)}\|e^{\gamma\Delta(t-s)}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mathbf{w}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds = 0.$$

Os outros termos do lado direito da desigualdade (12) seguem analogamente, donde tem-se

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/2}\|\mathbf{w}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \tag{13}$$

Agora, vamos mostrar que $\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ ao $t\to\infty$. Seja $Q_1(\cdot,t) = \boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b} + \chi\,\nabla\wedge\mathbf{w} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nabla P$. Observe que, dado $t_0 > t_*$ (veja (2)) suficientemente grande, pelo princípio de Duhammel, tem-se[6].

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|e^{(\mu+\chi)(t-s)}\boldsymbol{u}(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{t_0}^{t}\|e^{(\mu+\chi)(t-s)}Q_1(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds \\ &\leq \epsilon/2 + \int_{t_0}^{t}\|e^{(\mu+\chi)(t-s)}Q_1(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds. \end{aligned}$$

Usando a ortogonalidade em $L^2$ do projetor de Helmholtz para eliminar o termo $\nabla P$ e algumas estimativas básicas para a equação do calor (veja [11], por exemplo), tem-se[7]

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t}\|e^{(\mu+\chi)(t-s)}Q_1(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds &\leq \int_{t_0}^{t}\|e^{(\mu+\chi)(t-s)}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds \\ + \int_{t_0}^{t}\|e^{(\mu+\chi)(t-s)}(\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b})(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds &+ \chi\int_{t_0}^{t}\|e^{(\mu+\chi)(t-s)}(\nabla\wedge\mathbf{w})(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds. \end{aligned}$$

[6] Usando propriedades bem conhecidas da equação do calor que podem ser encontradas por exemplo em [11]
[7] Lembrando que o projetor de Helmholtz comuta com o *Heat Kernel* $e^{\Delta\tau}$.



DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0439 010439-5 

Vamos estimar o primeiro termo acima. Dado $\epsilon > 0$, usando novamente as propriedades básicas da equação do calor, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \|e^{(\mu+\chi)\Delta(t-s)}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds &\leq K(\mu+\chi)^{-\frac{3}{4}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|\boldsymbol{u}(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D\boldsymbol{u}(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds\\ &\leq K(\mu+\chi)^{-\frac{3}{4}}\|(\boldsymbol{u},\mathbf{w})(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}}\|D\boldsymbol{u}(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds\\ &< K\epsilon\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}}s^{-\frac{1}{2}}ds \leq K\epsilon t^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\frac{3}{4}}ds \leq 4C\epsilon t^{-\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

A análise do segundo termo segue o mesmo roteiro anterior. Para estimar o último termo basta usar o fato (13), provado anteriormente. Daí, $\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ ao $t\to\infty$. Usando o mesmo raciocínio, tem-se$\|\boldsymbol{b}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ ao $t\to\infty$. Obtendo (6). O que concluí a demonstração.

## 3 Decaimento das derivadas de ordem mais alta

Para demonstrar o teorema (1.2), é necessário antes provar o resultado abaixo. Para tal, usamos as mesmas idéias para demonstrar as desigualdades (9) e (10), porém, multiplicando por $(t-t_0)^m$ e derivando $m$ vezes a equação, obtendo assim, o resultado abaixo.

**Teorema 3.1.** *Seja ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{b}$) soluções de Leray do sistema (1), então existe $t_0$ suficientemente grande tal que*

$$\begin{aligned}&(t-t_0)^m\|(D^m\boldsymbol{u},D^m\boldsymbol{w},D^m\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &+\min(\mu,\gamma,\nu)\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^m\|(D^{m+1}\boldsymbol{u},D^{m+1}\boldsymbol{w},D^{m+1}\boldsymbol{b})(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds\\ &+2\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^m\|D^m\nabla\cdot\boldsymbol{w}(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds+2\chi\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^m\|D^m\boldsymbol{w}(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds\\ &\leq m\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^{m-1}\|(D^m\boldsymbol{u},D^m\boldsymbol{w},D^m\boldsymbol{b})(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds,\end{aligned}$$

*e*

$$\lim_{t\to\infty} t^{m/2}\|(D^m\boldsymbol{u},D^m\boldsymbol{w},D^m\boldsymbol{b}(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Donde, por interpolação, tem-se $\lim_{t\to\infty} t^{s/2}\|(\boldsymbol{u},\mathbf{w},\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} = 0$. Para provar o fato adicional, basta usar este resultado, aplicar o princípio de Duhamel e derivar a equação $m$ vezes e estimar os termos que aparecerão. Para tal usamos alguns resultados de Calderón-Zygmund, [3]. Obtendo assim, novamente por interpolação, $t^{s/2+1/2}\|\mathbf{w}(\cdot,t)\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \to 0$ ao $t\to\infty$.

## Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer todos os professores/pesquisadores do nosso Instituto de Matemática da UFRGS, cuja nossa formação se deve muito a eles. Em particular, gostaríamos de agradecer enormemente nosso orientador e grande amigo, Paulo Zingano que nos apresentou novas técnicas e esse mundo fantástico das EDPs. Este trabalho não seria possível sem ele. Agradecemos ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro. Agradecemos à SBMAC pela oportunidade.



DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0439 010439-6 

# Referências


[1] R. Agapitoo and M. Schonbek, *Non-uniform decay of MHD equations with and without magnetic diffusion*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no.10 -12, 1791-1812.

[2] J. Benameur and R. Selmi, *Long time decay to the Leray solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations*, Bull. London Math. Soc. **44** (2012), 1001-1019.

[3] R. Guterres, *Operadores Integrais Singulares e Aplicações em EDPs* Dissertação de mestrado, UFRGS, 2014.

[4] R. Guterres, J. Nunes and C. Perusato *Decay rates of global weak solutions for the MHD equations in $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$*, UFRGS, 2017 (available at https://arxiv.org/pdf/1703.06453.pdf).

[5] R. Kajikiya and T. Miyakawa, *On the $L^2$ decay of weak solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^n$*, Math. Z. **192** (1986), 135-148.

[6] T. Kato, *Strong $L^p$-solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471-480.

[7] H.-O. Kreiss, T. Hagstrom, J. Lorenz and P. R. Zingano, *Decay in time of incompressible flows*, J. Math. Fluid Mech. **5** (2003), 231-244.

[8] J. Leray, *Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193-248.

[9] K. Masuda, *Weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Tôhoku Math. Journal **36** (1984), 623-646.

[10] M. Oliver and E. S. Titi, *Remark on the rate of decay of higher order derivatives for solutions to the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$*, J. Funct. Anal. **172** (2000), 1-18.

[11] C. Perusato, *O problema de Leray para a equação de Navier-Stokes e algumas generalizações*, Dissertação de mestrado, UFRGS, 2014.

[12] M. A. Rojas-Medar and J. L. Boldrini *Magneto-Micropolar fluid motion: existence of weak solutions.* REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTANSE, V.11, número 2 (1998)

[13] M. E. Schonbek and M. Wiegner, *On the decay of higher-order norms of the solutions of Navier-Stokes equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **126A** (1996), 677-685.

[14] L. Schütz, J. Zingano and Paulo R. Zingano *On the supnorm form of Leray's problem for the incompressible Navier-Stokes equations*, J. Math. Phys. 56 (2015), no. 7, 071504, 15 pp.

[15] L. Schütz, J. S. Ziebell, J. P. Zingano and P. R. Zingano, *Sharp pointwise estimates for functions in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^n)$*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, 2015 (available at http://arxiv.org/pdf/1602.01902.pdf).

[16] M. Sermange and R. Temam, *Some mathematical questions related to the MHD equations*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 635-664.

[17] M. Wiegner, *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbb{R}^n$*, J. London Math. Soc. **35** (1987), 303-313.




DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0439  