
Uniformização de Curvas Algébricas Planares via EDOs Fuchsianas no Estudo de Sistemas de Comunicação

Anderson José de Oliveira¹

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alfenas, UNIFAL-MG

Reginaldo Palazzo Júnior²

Departamento de Comunicações, FEEC-UNICAMP

Resumo. Neste trabalho propomos que as seqüências de Farey sejam consideradas como provedoras das raízes de curvas algébricas planares e conseqüentemente como sendo provedoras das singularidades associadas às equações diferenciais fuchsianas. Como ponto de partida, consideramos as equações hipergeométrica e de Heun, com três e quatro pontos singulares regulares, respectivamente. Por meio deste procedimento, a região fundamental associada ao grupo fuchsiano é identificada e portanto, é essa a região onde ocorrerá a uniformização da curva algébrica planar. Apresentamos um caso de incompatibilidade dos gêneros de uma curva algébrica de grau 5 (gênero 2), com o correspondente caso de uma equação diferencial fuchsiana com seis pontos singulares regulares cuja região fundamental apresenta gênero 1. Esta incompatibilidade ocorre a partir desse caso considerado e é devida ao fato da existência de uma transformação elíptica ou parabólica, como um dos geradores do grupo fuchsiano, no processo de identificação da região fundamental que deverá uniformizar a curva algébrica planar. Os resultados apresentados permitem, além da caracterização teórica de elementos relacionados às equações diferenciais fuchsianas e geometria hiperbólica, a sua utilização no processo da caracterização algébrica e geométrica do problema de quantização de canais DMC.

Palavras-chave. equações diferenciais fuchsianas, transformações de Möbius, superfícies, grupos fuchsianos, uniformização.

1 Introdução

As equações diferenciais fuchsianas apresentam como principal característica o fato de que todo ponto singular no plano complexo estendido é regular. Essas equações diferenciais são muito utilizadas em problemas de Física-Matemática e os casos mais estudados são aqueles envolvendo equações com três pontos singulares regulares, como são os casos das equações hipergeométrica, de Legendre, e de Tchebychev enquanto que a equação de Heun contém quatro pontos singulares regulares.

Neste trabalho, nossa proposta é de utilizar elementos de uma seqüência de Farey como uma forma sistemática de obtenção das singularidades associadas às equações hiperelípticas

¹anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

²palazzo@dt.fee.unicamp.br

a serem utilizadas nas equações diferenciais fuchsianas. Como consequência, será possível identificar os geradores do grupo fuchsiano proveniente da curva algébrica bem como a determinação dos geradores do grupo fuchsiano proveniente da equação diferencial fuchsiana. A equivalência dessas regiões fundamentais se dará através do isomorfismo entre os correspondentes grupos fuchsianos que consequentemente identificarão a região fundamental de uniformização da referida curva algébrica.

Em [2], [7], vemos que os blocos modulador - canal - demodulador, de um sistema de comunicação, podem ser representados através de um grafo, que em sua forma mais completa passa a ser visto como um grafo completo biparticionado, denotado por $K_{m,n}$, equivalentemente o canal é discreto e sem memória (DMC), denotado por $C_{m,n}$ com m entradas e n saídas, ou seja, nenhum dígito depende estatisticamente dos dígitos enviados anteriormente. Através do grafo associado a um canal DMC, pode-se determinar o conjunto das superfícies no qual tal grafo pode ser mergulhado, estabelecendo a geometria dessas superfícies. Dessa forma, ao projetar um sistema de comunicação a proposta é de utilizar uma abordagem topológica da qual pode-se obter as estruturas geométrica e algébrica associadas ao canal DMC e, consequentemente, a esse sistema de comunicação de tal forma a estabelecer as condições para que uma menor complexidade e um melhor desempenho sejam alcançados no processo de transmissão da informação.

Neste trabalho, consideramos as etapas a serem seguidas em relação ao problema de quantização de canal, isto é, quando n é uma potência de m , através de uma abordagem topológica. O primeiro passo é realizar o mergulho do grafo completo biparticionado, $K_{m,n}$, em superfícies para a determinação do intervalo dos possíveis valores que o gênero, g , poderá assumir, isto é, $g_{min} \leq g \leq g_{max}$. O segundo passo é, uma vez conhecido o gênero e as singularidades, identificar a curva algébrica e encontrar as soluções linearmente independentes (LIs) da correspondente equação diferencial fuchsiana. O quociente dessas soluções LIs fornece os geradores do grupo fuchsiano associado ao conjunto das singularidades e, um subgrupo desse grupo corresponderá a uma região fundamental onde a curva algébrica será uniformizada. Com isso, acabamos de determinar as estruturas geométrica e algébrica do problema relacionado com a quantização da saída do canal.

2 Preliminares

2.1 Equações Diferenciais Fuchsianas

Segundo [5] e [9], uma equação do tipo:

$$y^{(n)}(z) + p_1(z)y^{(n-1)}(z) + \dots + p_{n-1}(z)y'(z) + p_n(z)y(z) = 0, \quad (1)$$

é uma equação de Fuchs ou uma equação do tipo fuchsiano se todo ponto singular no plano complexo estendido for regular.

Definição 1. *Uma EDO de segunda ordem com n pontos singulares é da forma*

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0, \quad (2)$$

com

$$p(z) = \frac{A_1}{z - \epsilon_1} + \dots + \frac{A_n}{z - \epsilon_n} + K_1,$$

$$q(z) = \frac{B_1}{(z - \epsilon_1)^2} + \frac{C_1}{z - \epsilon_1} + \dots + \frac{B_n}{(z - \epsilon_n)^2} + \frac{C_n}{z - \epsilon_n} + K_2,$$

onde:

$$\begin{aligned} A_1 + \dots + A_n &= 2, \\ C_1 + \dots + C_n &= 0, \\ (B_1 + \dots + B_n) + (\epsilon_1 C_1 + \dots + \epsilon_n C_n) &= 0, \\ (2\epsilon_1 B_1 + \dots + 2\epsilon_n B_n) + (\epsilon_1^2 C_1 + \dots + \epsilon_n^2 C_n) &= 0. \end{aligned}$$

2.2 Geometria Hiperbólica

Definição 2. [1], [4] Uma figura geométrica S é um subconjunto de pontos em um espaço métrico E . Duas figuras geométricas S_1 e S_2 de um espaço métrico E são geometricamente congruentes se existe uma isometria $T : E \rightarrow E$ tal que $T(S_1) = S_2$. Nesse caso, dizemos que S_1 e S_2 têm a mesma forma. Além disso, uma isometria T que deixa uma figura geométrica S invariante, ou seja, $T(S) = S$, é chamada uma simetria de S . O conjunto das simetrias de S , $U(S)$, é um grupo sob a operação de composição, sendo que $U(S)$ é chamado grupo de simetrias de S . Em superfícies de gênero ≥ 2 , a geometria a ser considerada é a geometria hiperbólica. Vamos considerar dois modelos para a geometria hiperbólica plana: o plano de Lobachevski ou modelo do semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$ e o modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.

Definição 3. [1], [4] Um emparelhamento de arestas de P é um conjunto $\phi = \{T_\tau | \tau \in \mathcal{A}\}$ de isometrias que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{A}$: existe aresta $\tau' = \tau$ e as isometrias T_τ e $T_{\tau'}$, satisfazem a relação $T_{\tau'} = T_\tau^{-1}$ e se τ for aresta de P então $\tau' = P \cap T_\tau^{-1}(P)$.

Definição 4. [6] Seja \mathbb{F}_m uma sequência de Farey de ordem m . Então, \mathbb{F}_m consiste de uma série de frações irredutíveis cujo denominador não excede m , ou seja, $\frac{P}{Q}$ com $|P|, |Q| \leq m$ organizados em ordem crescente, isto é,

$$\mathbb{F}_1 = \{-\infty, -1, 0, 1, \infty\}$$

e

$$\mathbb{F}_2 = \{-\infty, -2, -1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \infty\}.$$

2.3 Uniformização

Definição 5. [3] Seja $w = f(z)$ uma função de múltiplos valores de z . Sejam $w = w(z)$, $z = z(y)$ duas funções simples de y , tais que $w(y) = f(z(y))$. Dizemos que w e z são uniformizações de $w = f(z)$. A variável y é dita variável de uniformização.

2.4 Funções hiperelípticas

Definição 6. [3] *Em geometria algébrica, uma curva hiperelíptica é uma curva algébrica dada por uma equação da forma $y^2 = f(z)$, onde $f(z)$ é um polinômio de grau $n > 4$ com n raízes distintas. Uma função hiperelíptica é um elemento do corpo de funções de uma curva ou, eventualmente, da variedade Jacobiana na curva.*

3 Resultados e Discussões

Nesta seção, através de exemplos, apresentamos a proposta de utilização de elementos de uma sequência de Farey na caracterização da superfície de Riemann associada ao coeficiente de maior ordem na equação diferencial fuchsiana, bem como dos geradores dos grupos fuchsianos associados às mesmas, com o objetivo de identificar a região fundamental que uniformizará a referida curva algébrica planar.

Usando as singularidades como elementos de uma sequência de Farey, sempre uma delas sendo o infinito, juntamente com as transformações de emparelhamento de lados da região fundamental resultante associada à superfície de Riemann, os geradores do grupo fuchsiano são determinados. É importante enfatizar a condição que deve ser satisfeita quando se utiliza esta abordagem, isto é, o gênero da curva algébrica tem que coincidir com o gênero da superfície, que é obtido pelas transformações de emparelhamento de lados e a característica de Euler (gênero máximo). Desta forma, a região fundamental é na realidade a região onde ocorrerá a uniformização da curva algébrica. Além disso, para que a região poligonal tenha as singularidades (sempre uma delas sendo o infinito) como vértices da região fundamental para a uniformização da curva algébrica, há uma restrição associada ao número de singularidades para que a igualdade do gênero possa ser alcançada.

Exemplo 3.1. *Vamos analisar o mergulho de um grafo completo biparticionado $K_{2,2}$, representando o canal $C_{2,2}$. O gênero mínimo, g_{min} , e o gênero máximo, g_{max} , da correspondente superfície são dados por: $g_{min}(K_{2,2}) = \{(m-2)(n-2)/4\} = \{0\} = 0$, onde $\{a\}$ denota o menor inteiro maior ou igual ao número real a e $g_{max}(K_{2,2}) = [(m-1)(n-1)/2] = [0.5] = 0$, onde $[a]$ denota o maior inteiro menor ou igual ao número real a . Então, $g_{min} = g_{max} = 0$, implica $g = 0$. Com $g = 0$, a curva algébrica tem grau 2. Então, se as singularidades são dadas por $0, 1$ e ∞ , a correspondente curva algébrica planar é dada por $y^2 = z(z-1)$. Como consequência, a equação diferencial fuchsiana, do tipo hipergeométrica, é dada por:*

$$(z^2 - z)y''(z) + 2(z + 1)y'(z) - \lambda(\lambda + 1)y(z) = 0. \quad (3)$$

Os pontos $0, 1$ e ∞ são pontos singulares regulares, [8], os quais fazem parte da sequência de Farey $\mathbb{F}_1 = \{-\infty, -1, 0, 1, \infty\}$. Além disso, essas singularidades podem ser associadas aos vértices de um triângulo fundamental, no qual transformações de emparelhamentos podem ser aplicadas, sendo uma transformação elíptica e uma parabólica. Analisando os emparelhamentos para o caso de três pontos singulares regulares, a superfície associada é a esfera [1]. Uma outra forma de fazermos essa identificação é observando

que o coeficiente de y'' tem grau 2, logo seu gênero é dado por $2g + 2 = 2$, que implica em $g = 0$, ou seja, a esfera. Note que a superfície associada à curva algébrica está em consonância com a superfície associada aos emparelhamentos. Essa caracterização é apresentada na Figura 1. Podemos identificar as transformações $\gamma_1(z) = \frac{-1}{z}$ e $\gamma_2(z) = z + 2$, caracterizando os geradores do grupo fuchsiano.

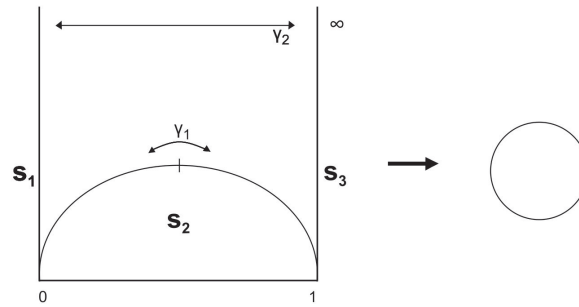


Figura 1: Superfície de gênero 0.

Exemplo 3.2. Vamos agora analisar o mergulho do grafo biparticionado $K_{2,4}$, como o canal $C_{2,4}$. O gênero mínimo e o gênero máximo da correspondente superfície são dados por: $g_{min}(K_{2,4}) = \{(m - 2)(n - 2) / 4\} = \{0\} = 0$, e $g_{max}(K_{2,4}) = [(m - 1)(n - 1) / 2] = [1.5] = 1$. Então, $g_{min} = 0$ e $g_{max} = 1$, implicando $0 \leq g \leq 1$. A equação diferencial fuchsiana, de Heun, é dada por:

$$(z^3 - z)y''(z) + (4z^2 - z - 1)y'(z) + (3z - 1)y(z) = 0. \tag{4}$$

Os pontos singulares regulares são $-1, 0, 1, \infty$, [8], os quais fazem parte da sequência de Farey $\mathbb{F}_1 = \{-\infty, -1, 0, 1, \infty\}$ e podem ser representadas por meio de um polígono de quatro lados, como mostra a Figura 2. As transformações de Möbius (elípticas, parabólicas e hiperbólicas), ou de emparelhamentos das arestas do polígono são os geradores do grupo fuchsiano associado e identificam a superfície de Riemann. As transformações hiperbólicas conduzem ao gênero máximo da superfície associada ao polígono fundamental, como mostra a Figura 2.

O grau da curva algébrica é três, conduzindo a $2g + 1 = 3 \Rightarrow g = 1$, portanto, o toro. Com isso, o gênero associado à curva algébrica é igual ao gênero encontrado através da característica de Euler com a aplicação das transformações consideradas. Desta forma, o polígono fundamental é a região em que a curva algébrica será uniformizada. As transformações hiperbólicas aplicadas são do tipo: $\gamma_1(z) = \frac{z + 1}{z + 2}$ e $\gamma_2(z) = \frac{2z + 1}{z + 1}$.

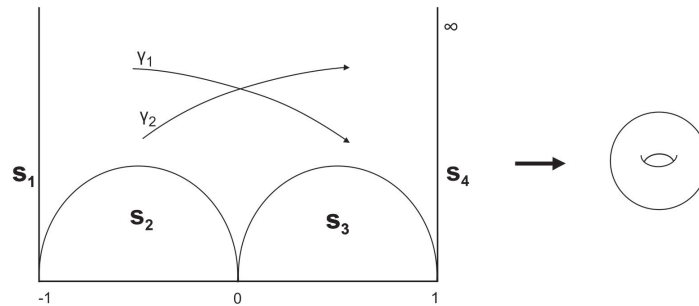


Figura 2: Superfície de gênero 1

Exemplo 3.3. *Considere o mergulho do grafo $K_{2,8}$ como sendo o canal $C_{2,8}$. Os gêneros mínimo e máximo são dados por $g_{min}(K_{2,8}) = \{(m-2)(n-2)/4\} = \{0\} = 0$, e $g_{max}(K_{2,8}) = [(m-1)(n-1)/2] = [3.5] = 3$. Então, $g_{min} = 0$ e $g_{max} = 3$ implicando em $0 \leq g \leq 3$. Consideraremos o caso $g = 2$ devido às suas especificidades. Uma possível curva algébrica planar a ser considerada é dada por $y^2 = z^5 + 1$. Pode ser mostrado que existe um isomorfismo entre os grupos formados pelo conjunto de soluções de $z^5 + 1$ com a operação usual de multiplicação, e o conjunto $\{0, \pm 1, \pm 2\}$ com a operação mod 5. A equação diferencial fuchsiana é dada por:*

$$y''(z) + \frac{5z^4}{2(z^5 + 1)} \cdot y'(z) + \frac{z^3}{2(z^5 + 1)} y(z) = 0. \tag{5}$$

Observe que os valores inteiros são elementos da sequência de Farey \mathbb{F}_2 , dada por $\mathbb{F}_2 = \{-\infty, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \infty\}$. Considerando as singularidades, o polígono fundamental correspondente é um hexágono. Como mostrado em [1], existem emparelhamentos conduzindo a superfícies com gênero $g = 1$ e superfícies com gênero $g = 0$. Como o grau da curva algébrica planar é cinco, segue que o gênero da curva é $2g + 1 = 5$, e assim $g = 2$ (bitoro). Portanto, não há correspondência entre o gênero da curva e o gênero da região fundamental. Como consequência, a curva algébrica planar não pode ser uniformizada nessa região poligonal. Portanto, um procedimento alternativo para encontrar a região fundamental é necessário com o objetivo de coincidir os valores do gênero da curva e da região poligonal. Tal procedimento alternativo é devido a Whittaker, [10].

4 Conclusões

Neste artigo mostramos a proposta de utilização das singularidades de equações diferenciais fuchsianas como elementos de uma sequência de Farey. Identificamos as correspondentes regiões poligonais para a uniformização da curva algébrica planar, uma vez que existe a igualdade dos gêneros da curva algébrica e da superfície tendo as singularidades como vértices da região fundamental, para uma equação hipergeométrica, com três pontos

singulares regulares e para uma equação de Heun, com quatro pontos singulares regulares. Além disso, apresentamos um caso envolvendo uma equação com seis pontos singulares, onde não foi possível obter a igualdade dos gêneros da curva algébrica e da superfície de Riemann via a característica de Euler e , conseqüentemente, a não definição da região onde a curva algébrica possa ser uniformizada. Em todos os casos analisados, apresentamos os geradores do grupo fuchsiano associados a cada uma das equações diferenciais fuchsianas analisadas.

Agradecimentos

Agradecemos à Capes, Fapesp, Fapemig pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] A. F. Alves, Análise dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes, Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, 2001.
- [2] R. G. Cavalcanti, H. Lazari, J. D. Lima, and R. Palazzo Jr. A new approach to the design of digital communication systems, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pages 1-33, 2003.
- [3] L. R. Ford. *Automorphic Functions*. Chelsea Publishing Company, New York, 1962.
- [4] S. Katok. *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press, 1992.
- [5] G. Kristensson. *Second Order Differential Equations - Special Functions and their classification*. Springer, New York, 2010.
- [6] L. Leskow and R. Palazzo Jr. Construction of Hiperbolic Fundamental Regions for Source Coding Applications, *Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*, pages 462-465, 2011.
- [7] J. D. Lima, Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies Compactas com e sem bordos, provenientes de mergulhos de canais discretos sem memória, Tese de Doutorado, FEEC-Unicamp, 2002.
- [8] A. J. Oliveira and R. Palazzo Jr. Um estudo sobre equações diferenciais fuchsianas e as relações com as superfícies associadas às tesselações de Farey. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, Natal, Rio Grande do Norte, Brasil, 2015.
- [9] J. Vaz. *Notas de Aula Métodos de Matemática Aplicada I*. IMECC, Unicamp, 2012.
- [10] E. T. Whittaker. On Hyperlemniscate functions, a family of automorphic functions, *J. London Math. Soc.*, pages 274-278, 1929.