

---

## Simulação para o Escoamento de Fluidos Compressíveis em Meios Porosos

Gisiane Simão<sup>1</sup>

Luiz Nélio Henderson<sup>2</sup>

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brasil

**Resumo.** A utilização do método SEMD (Simulador para o Escoamento Miscível sem Derivadas) com o método de Newton Inexato Globalizado com Gradiente Conjugado (NIG/GC) para a resolução de problemas formulados por equações diferenciais parciais não-lineares é de interesse crescente para simular processos práticos de engenharia. O modelo aqui considerado é aquele empregado para descrever o deslocamento do fluido compressível miscível em meios porosos com fontes e sumidouros, onde a densidade da mistura de fluidos varia exponencialmente com a pressão. Este é um método para a solução de sistemas não-lineares de grande porte e não utiliza qualquer informação explícita associada com a matriz Jacobi-ana. Os resultados encontrados mostram que este algoritmo moderno é um método eficiente para a simulação de escoamentos compressíveis em meios.

**Palavras-chave.** Miscível. Fluidos compressíveis. Meios porosos. Derivada. Simulador.

### 1 Introdução

A ampliação de métodos numéricos tem influenciado para o propósito da simulação numérica dos escoamentos em meios porosos com o intuito de aumentar a produção de um campo de petróleo. Os escoamentos de fluidos miscíveis tem um papel importante nas áreas da ciência e da tecnologia, pela qual incluem não só a engenharia de petróleo como também a engenharia química. Diante disso, a simulação do escoamento miscível é de uma importância vital para o entendimento e previsão de recursos industriais. Este trabalho tem como objetivo a modelagem e simulação computacional do escoamento miscível e ligeiramente compressível em meios porosos. Na resolução da equação da pressão, foi considerada uma equação diferencial parabólica de segunda ordem, munida com condições de contorno de Neumann. O método numérico utilizado para a resolução das equações não lineares foi o SEMD, um Simulador para o Escoamento Miscível sem Derivadas.

### 2 Modelagem do Escoamento Miscível

Inicialmente, considerando um fluido multicomponente constituído de  $n_c$  espécies químicas, suporemos que tal mistura desloca-se no interior de um meio poroso de porosidade  $\phi$  e per-

---

<sup>1</sup>gisianesimao@gmail.com

<sup>2</sup>nelio@iprj.uerj.br

meabilidade  $k$ , e que esse escoamento ocorre em condições de completa miscibilidade. Isso significa que em qualquer posição do meio poroso a mistura fluida não mostra interfaces, se apresentando durante todo tempo como um fluido monofásico. O modelo matemático do escoamento miscível em um meio poroso pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais, resultante da Lei de conservação de massa da mistura, da Lei de Darcy e de uma equação de advecção-convecção predominantemente convectiva expressando a conservação de massa do fluido injetado [13]. A Lei de Darcy pode ser escrita na seguinte forma diferencial:

$$\mathbf{u} = \frac{-k}{\mu}(\nabla P - \rho g \nabla z) \quad (1)$$

em que, o vetor  $\mathbf{u}$  é a velocidade do fluido,  $P$  denota a pressão,  $\rho$  representa a densidade,  $g$  a aceleração da gravidade local e  $z$  a profundidade do meio poroso.

Seguindo a Equação (1) e denotando por  $c_i$  a densidade mássica (também chamada de concentração) da espécie  $i = 1, \dots, n_c$ , a qual tem dimensão de massa da espécie  $i$  por unidade de volume, a equação de conservação de massa desse componente químico presente na mistura pode ser escrita por:

$$\frac{\partial(\phi c_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (c_i \mathbf{u}_i) = q_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_c \quad (2)$$

em que,  $t$  representa o tempo,  $q_i$  é a taxa de extração ou de injeção da espécie  $i$  no meio poroso, a qual tem dimensão de massa desse componente por unidade de volume, por unidade de tempo, e  $u_i$  denota o campo de velocidade do corpo fluido constituído somente pela espécie química  $i$  [3].

Desprezando os efeitos de gravidade, procedimento típico de escoamentos horizontais, a Equação (1) pode ser simplificada da seguinte forma [3]:

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla P \quad (3)$$

Da Equação (3), e considerando o vetor  $\mathbf{J}_i = c_i(\mathbf{u}_i - \mathbf{u})$ , a Equação (2) pode ser reescrita na seguinte forma equivalente:

$$\frac{\partial(\phi c_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (c_i \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{J}_i) = q_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n_c. \quad (4)$$

onde  $\mathbf{J}_i$  é o vetor do fluxo difusivo da espécie  $i$ .

Na modelagem de escoamentos multicomponente em meios porosos, é útil considerar uma equação que forneça o balanço total de massa da mistura. Basicamente, o modelo referido acima pode ser formulado utiliza-se a equação que descreve a conservação de massa do solvente e a equação de conservação de massa total da mistura binária (solvente-óleo), juntamente com Lei de Darcy. Aqui, essas equações do chamado modelo miscível serão resumidas como seguem, de acordo com [9]:

$$\frac{\partial(\phi \rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{J} = wq \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = q \tag{6}$$

A Equação (5) descreve o balanço de massa do solvente, onde  $w$  e  $\mathbf{J}$  denotam a fração mássica e o vetor do fluxo difusivo do solvente, respectivamente. Como antes, a Equação (6) modela o balanço de massa total do fluido miscível, constituído pelas espécies químicas denominadas de solvente e óleo, e a Equação (3) resume a lei de Darcy para escoamentos monofásicos, com a ausência do termo de gravidade, onde se supõe que a viscosidade da mistura é uma função da fração mássica do solvente, isto é,  $\mu = \mu(w)$ . O vetor do fluxo difusivo do solvente mostrado na Equação (5), o modelo clássico usado na modelagem de escoamentos miscíveis em reservatórios, pode ser escrito como  $\mathbf{J} = -\rho\mathbf{D}\nabla w$ , onde o termo  $\mathbf{D}$  representa um tensor de segunda ordem, denominado de tensor de difusão-dispersão do solvente na mistura (solvente-óleo) em meios porosos, da seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \phi d_M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(\alpha_L - \alpha_T)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

onde, pela Equação (3), temos que

$$u_1 = -\frac{k}{\mu(w)} \frac{\partial P}{\partial x} \tag{8}$$

$$u_2 = -\frac{k}{\mu(w)} \frac{\partial P}{\partial y} \tag{9}$$

### 2.1 Equações do Modelo

O domínio espacial  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$  será discretizado utilizando uma grade de blocos centrados, denotada por  $\hat{\Omega} = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2; i, \dots, n_x$  e  $j = 1, \dots, n_y$  de modo que  $x_i = (i - 1/2)\Delta x$ , para todo  $i = 1, \dots, n_x$ , com  $\Delta x = \frac{L_x}{n_x}$  e  $y_j = (j - 1/2)\Delta y$ , para todo  $j = 1, \dots, n_y$ , com  $\Delta y = \frac{L_y}{n_y}$ . O domínio temporal será representado pelo intervalo fechado  $[t_0, t_f]$ , onde  $t_f$  denotará o instante final e  $t_0$  o instante inicial, considerado como sendo o tempo zero.

$$\phi - \left[ \frac{\partial \rho(P)}{\partial t} \right]_{i,j} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho(P)k}{\mu(w)} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right]_{i,j} - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho(P)k}{\mu(w)} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right]_{i,j} - q_{i,j} = 0 \tag{10}$$

$$\phi \left[ \frac{\partial (\rho(P)w)}{\partial t} \right]_{i,j} + \left( \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right)_{i,j} - w_{i,j} q_{i,j} = 0 \tag{11}$$

onde  $F_x$  e  $F_y$  são os fluxos totais nas respectivas direções  $x$  e  $y$ , dados por

$$\mathbf{F}_x = -w \frac{\rho(P)k}{\mu(w)} \frac{\partial P}{\partial x} - \rho \mathbf{D}_{11} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho \mathbf{D}_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \tag{12}$$

$$\mathbf{F}_y = -w \frac{\rho(P)k}{\mu(w)} \frac{\partial P}{\partial y} - \rho \mathbf{D}_{21} \frac{\partial w}{\partial x} - \rho \mathbf{D}_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (13)$$

As evoluções temporais das soluções numéricas das equações acima serão feitas de forma iterativa, usando-se incrementos de passos de tempo iguais a  $\Delta t$ . Esse processo iterativo será a chave para desacoplar as equações do modelo miscível, facilitando sua resolução numérica, através procedimento de separação de operadores semelhante ao esquema conhecido como IMPES, descrito em mais detalhes no livro de [1] e em [9].

## 2.2 Método Numérico para as Equações Não Lineares

Ao se considerar a Equação (10) ao longo de todos os nós da grade, se obtém um sistema não linear com equações, cujas variáveis são os valores da pressão em cada nó da grade de blocos centrados, usada na discretização espacial. Com isso, durante a evolução temporal e para obter-se o campo de pressão, é exigida a resolução numérica de um sistema não linear a cada passo de tempo que separa o nível de tempo do nível futuro. Para isto, foi utilizado o método de Newton, que é um método iterativo que gera, a partir de um dado inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ , uma sequência de pontos  $\{\mathbf{x}_k\}$ , a qual (na presença de condições apropriadas) deve convergir para um ponto  $\mathbf{x}^*$ , que será uma solução do sistema não linear  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ . Como a aplicação  $\mathbf{F}$  é diferenciável, se  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_k)$  representa a matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}$  em  $\mathbf{x}_k$ , então dado  $\mathbf{0} \neq \mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^N$  suficientemente pequeno, temos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + \mathbf{r}(\mathbf{d}_k), \quad (14)$$

onde  $\mathbf{r}(\mathbf{d}_k)$  é chamado de "resto".

Uma das desvantagens do método de Newton é ter que resolver as equações de Newton em cada etapa, fato que se agrava quando lidamos com grandes valores de  $N$ . Computar uma solução exata em cada iteração usando-se um método direto, como o método de Gauss, pode exigir muito esforço computacional, principalmente se  $N$  for um número muito grande, como geralmente ocorre quando o sistema não linear em questão decorre da discretização de equações diferenciais. Tal procedimento se torna ainda mais injustificável quando  $\mathbf{x}_k$  se encontra relativamente distante de  $\mathbf{x}^*$ . Assim, como observado por [6], parece mais razoável usar um método iterativo para resolver as equações, a cada iteração, somente de forma aproximada. Em outras palavras, considera-se que o vetor  $\mathbf{r}_k$  (chamado de termo residual do sistema não linear), aqui convenientemente definido por:

$$\mathbf{r}_k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k. \quad (15)$$

Foi empregado no método de Newton Inexato o mesmo critério de parada sugerido por [11], dado por:

$$\frac{\|\mathbf{F}(x_k)\|}{\sqrt{N}} \leq e_a + e_r \frac{\|\mathbf{F}(x_0)\|}{\sqrt{N}} \quad (16)$$

onde  $e_a = 10^{-5}$  e  $e_r = 10^{-4}$ . Assim a tolerância  $\tau_t$  efetivamente usada aqui no método de Newton Inexato é da forma:

$$\tau_t = e_a \sqrt{N} + e_r \| \mathbf{F}(x_0) \| \tag{17}$$

Métodos de Newton Inexatos são variantes do método de Newton clássico. Assim, a exemplo deste, a convergência de um método de Newton Inexato depende da localização do dado inicial  $\mathbf{x}_0$ . A fim de melhorar a convergência de sequências inicializadas em pontos arbitrários, [7] incorporaram as chamadas estratégias de "globalização", que buscam tornar um método de Newton Inexato mais robusto. Estes autores lidam com diferentes técnicas de globalização, as quais essencialmente procuram garantir um decréscimo suficiente no valor de  $\| \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1}) \|$  a cada iteração  $k (\geq 1)$ , provocando dessa forma a convergência para a solução desejada, a qual certamente dependerá da natureza do sistema não linear considerado.

### 3 Resultados

As equações da pressão e da fração mássica do solvente foram discretizadas através de diferenças finitas centradas, classicamente usadas na simulação de reservatórios de petróleo [1].

No caso simulado foi simulado com os dados mostrados na Tabela 1, a seguir, onde  $P_0$  denota o valor da pressão inicial em todos os pontos do reservatório. No poço de injeção foi considerado  $\omega(t) = 1$ , para todo  $t > 0$ .

Tabela 1: Dados para pressão inicial, taxa de injeção (produção), propriedades do meio poroso, modelo de poço e equação de estado.

$P_0$ (atm)	$Q$ ( $cm^3/s$ )	$\phi$	$k$ (darcy)	$r_w$ (cm)	$P_w$ (atm)	$\rho_r$ (g/cm)	$P_r$ (atm)	$\beta_T$ ( $atm^{-1}$ )
30	0,2	0,2	0,05	0,5	20	0,9	1,0	$1 \times 10^{-7}$

No que segue, o exemplo a seguir, considera-se que o meio poroso retangular  $\Omega$  é discretizado usando-se uma grade com  $100 \times 100$  blocos, onde  $\Delta x = \Delta y = 10cm$ , o que resulta em um reservatório de 10 metros quadrados de área. O passo de tempo usado foi de  $\Delta t = 100s$ , o qual foi selecionado após intensivos testes computacionais. Além disso, foi considerado que o meio poroso tem espessura constante de  $\Delta z = 10cm$ . O regime de exploração do reservatório usado é do tipo *five spot*. Isso significa que o solvente é injetado em um poço localizado em um bloco que se encontra em um dos cornes do domínio retangular, enquanto o óleo é extraído em outro poço que está localizado no bloco de canto diametralmente oposto ao poço de injeção.

No caso foi considerado um escoamento miscível puramente convectivo, onde o coeficiente difusão molecular e os coeficientes de dispersão longitudinal e transversal assumem, por hipótese, o valor zero, ou seja,  $d_M = 0.0 cm^2/s$  e  $\alpha_L = \alpha_T = 0.0 cm$ . Supondo que o óleo e o solvente possuem a mesma viscosidade, dadas por  $\mu_o = \mu_s = 1.0\mu c_p$ , o que caracteriza um escoamento com razão de mobilidade ( $M = \mu_o/\mu_s$ ) unitária. Para obtenção da

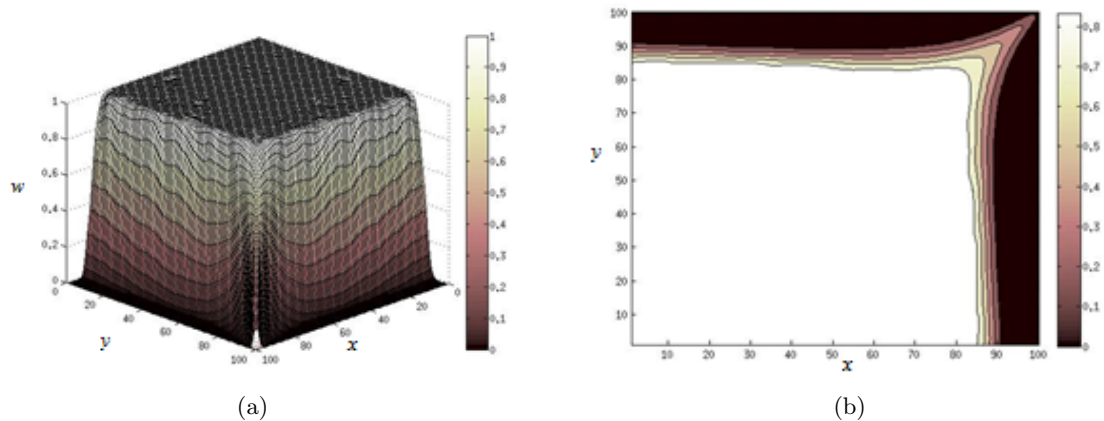


Figura 1: Simulação usando o método SEMD no instante de injeção  $t = 10$  dias: (a) Superfície da fração mássica do solvente e (b) Curvas de nível da fração mássica do solvente

simulação obtida pela Figura 1, o SEMD gerou o resultado em 40 minutos para 10 dias de injeção de solvente, o que representa um bom tempo de execução.

## 4 Conclusões

As equações diferenciais que modelam o problema do escoamento miscível foram resolvidas simulando o processo de recuperação de petróleo decorrente da injeção de um solvente em um reservatório de óleo. Avaliou-se o comportamento das equações diferenciais parciais do tipo convecção-difusão. Para a solução deste sistema foi utilizado o simulador SEMD, que se mostrou bastante eficaz na simulação do problema, para o intervalo de tempo de 10 dias após a injeção do fluido. Foi capaz de simular o processo em um tempo de CPU relativamente curto. Assim pode-se concluir que o SEMD é um método eficiente para a simulação de escoamento compressível em meios porosos.

Para trabalhos futuros, recomenda-se utilizar outros simuladores disponíveis na literatura e comparar com o método aqui descrito.

## Referências

- [1] K. Aziz, A. Settari. Petroleum Reservoir Simulation, London: Applied Science Publishers, 1979.
- [2] J. Barzilai, J. M. Borwein. Two-point step size gradient methods, IMA Journal of Numerical Analysis, 8, 141-148, 1988.
- [3] J. Bear. Dynamics of fluids in porous media. New York: Dover, 1972.
- [4] R. B. Bird, W. E. Stewart e E. N. Lightfoot. Transport phenomena. New York: Wiley, 780 p, 1960.

- [5] R. E. Collins. Flow of fluids through porous materials. New Jersey: Van Nostrand-Reinhold, 1961.
- [6] R. Dembo, S. Eisenstat, T. Steihaug. Inexact Newton methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, 19, pp. 400-408, 1982.
- [7] S. C. Eisenstat e H. F. Walker. Globally convergent inexact Newton methods. *SIAM Journal on Optimization*, 4(2), 393-422, 1994.
- [8] K. M. Fernandes. Formulação de Mínimos Quadrados aplicada à Problemas de Escoramentos Miscíveis, Dissertação de mestrado, UFF, Niterói - RJ, Brasil, 2007.
- [9] N. Henderson, G. Simão, W. F. Sacco. Study of a Jacobianfree approach in the simulation of compressible fluid flows in porous media using a derivativefree spectral method. *Advances in Engineering Software*, 81, 1729, 2015.
- [10] D. W. Krevelen. Properties of Polymers. Their Correlation with Chemical Structure, Their Numerical Estimation and Prediction from Additive Group Contribution, 3 ed., Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [11] W. La Cruz, J. M. Martínez, M. Raydan. Spectral residual method without gradient information for solving large-scale nonlinear systems of equations. *Mathematics of Computation*, 75, 1429-1448, 2006.
- [12] R. J. Leveque. Finite volume methods for hyperbolic problems, *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, 2002.
- [13] D. Peaceman. Survey of problems in numerical reservoir simulation. SIAM, Philadelphia, 1986.
- [14] J. W. Thomas. Numerical partial differential equations: conservation laws and elliptic equations, *Texts in Applied Mathematics* 33, Springer, New York, 1999.
- [15] M. R. Todd, W. J. Longstaff. The development, testing and application of a numerical simulator for predicting miscible flood performance, *J. Petrol. Technol.*, 3484, 1972.