Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estimativa de Parte Relevante da Fronteira da Região de Estabilidade usando Função Energia Generalizada

Yuri C. S. Ribeiro [1]
Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP
Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento, Tecumseh do Brasil Ltda., São Carlos, SP
Luís F. C. Alberto [2]
Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP

Resumo. Neste trabalho, apresentamos um método para estimar parte relevante da fronteira da região de estabilidade associada a um conjunto atrativo de um sistema não linear através do uso de uma função energia generalizada. A teoria desenvolvida permite concluir que a estimativa obtida é sempre conservadora, em um certo sentido. Apresentamos um algoritmo conceitual e sua aplicação é ilustrada por meio de um exemplo.

Palavras-chave. Método CUEP, Funções Energia Generalizadas, Região de Estabilidade, Sistemas Elétricos de Potência, Estabilidade Transitória.

1 Introdução

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

onde $\dot{x}(t)$ denota a derivada de $x(t)$ com respeito a variável t e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$. Denotaremos por $t \mapsto \Phi(t, x_0)$, a única solução de (1) satisfazendo $\Phi(0, x_0) = x_0$.

Um *conjunto atrativo* σ é um conjunto fechado e invariante que possui uma vizinhança aberta U tal que, para todo $x_0 \in U$, temos $\Phi(t, x_0) \to \sigma$ quando $t \to \infty$, ou seja, a distância entre $\Phi(t, x_0)$ e σ tende para zero à medida que $t \to \infty$.

O conjunto ω*-limite* de x, denotado por $\omega(x)$, é o conjunto de todos os pontos p para os quais existe uma sequência de tempos $\{t_n\}$ com $t_n \to \infty$ e $|\Phi(t_n, x) - p| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Se σ é um conjunto atrativo, definimos a *região de estabilidade* de σ por

$$A(\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(x) \subset \sigma\}.$$

A região de estabilidade de conjuntos atrativos desempenha papel fundamental no estudo do comportamento assintótico de sistemas dinâmicos. Por exemplo, no estudo da

[1] yribeiro@usp.br
[2] lfcalberto@usp.br

imunização de uma população com respeito a uma dada doença (ver [8]), em controle automático de vôo (ver [3]) ou no estudo de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência (ver [7]).

Agora, dado um número real $t_s > 0$, considere um sistema regido por equações do tipo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = g(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. , \text{ onde } \quad g(t,x) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}(x), t \in [0, t_s] \\ f(x), t > t_s \end{array} \right. , \tag{2}$$

onde $\tilde{f}$ e f são funções de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ nele próprio.

Este tipo de modelo surge, tipicamente, no estudo do impacto de determinadas perturbações na dinâmica de um dado sistema. O sistema se encontra no estado x_0 quando é submetido a uma perturbação de duração igual a t_s. Durante a perturbação, sua dinâmica é regida pelo campo de vetores $\tilde{f}$. Depois disso, a perturbação é removida e o sistema se comporta com dinâmica regida pela função f.

Por isso, os subsistemas $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ e $\dot{x} = f(x)$ serão denominados, respectivamente, sistema *perturbado* e sistema *pós-perturbação*.

Suponha que a dinâmica do sistema pós-perturbação possua um conjunto atrativo σ que corresponda a um comportamento desejável para o sistema em regime permanente. Dizemos que o sistema (2) *suporta a perturbação*, quando ele evolui para σ após a remoção da perturbação. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que, no instante t_s, a solução do sistema perturbado $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ esteja contida na região de estabilidade $A(\sigma)$ com respeito ao sistema pós-perturbação $\dot{x} = f(x)$.

A análise de estabilidade deste tipo de sistema consiste em determinar se o sistema suporta a perturbação com duração t_s. A pergunta que surge naturalmente é: como podemos determinar a máxima duração da perturbação para que o sistema ainda a suporte?

Esta pergunta pode ser respondida se pudermos detectar o instante em que a solução do sistema perturbado $\dot{x} = \tilde{f}(x)$ intersecta a fronteira da região de estabilidade $\partial A(\sigma)$ com respeito à dinâmica pós-perturbação. Para tanto, basta que consigamos uma estimativa para uma parte relevante de $\partial A(\sigma)$, ou seja, na direção da trajetória do sistema perturbado.

A necessidade de se obter tal estimativa, mais precisamente aquela que surge quando se estuda perturbações causadas por faltas em sistemas elétricos de potência, deu origem a um método chamado CUEP (ver [7]). Porém, o método CUEP está fundamentado na teoria das *funções energia* (FE) (ver [6]) e depende da existência de tal função para que possa ser aplicado ao sistema sob análise.

A existência de uma FE para um sistema tem implicações sobre o comportamento dinâmico de suas soluções. De fato, toda solução limitada converge para um ponto de equilíbrio quando o tempo tende para infinito. Consequentemente, sistemas que possuem órbitas periódicas ou soluções caóticas não admitem FE (ver [4]).

É neste contexto que o conceito de *função energia generalizada* foi introduzido em [1,2]. Embora funções energia generalizadas sejam mais fáceis de serem encontradas e possam ser admitidas por uma classe bastante geral de sistemas, é necessário encontrar resultados que deem suporte a métodos para a análise da estabilidade em sistemas que as admite.

Neste trabalho um método para estimar partes relevantes da fronteira da região de estabilidade inspirado no método CUEP é proposto para sistemas dinâmicos que admitem função energia generalizada.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0357

1.1 Funções Energia Generalizadas

Considere o sistema (1) e seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Defina o conjunto

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x) \cdot f(x) \geq 0\}. \tag{3}$$

Em [1] foi introduzida a seguinte classe de funções auxiliares.

Definição 1.1. *Uma função $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser uma* função de energia generalizada *(FEG) para o sistema* (1)*, quando as seguintes afirmações são verdadeiras,*

G1. *O conjunto C é limitado;*

G2. *O conjunto C possui um número finito de componentes conexas;*

G3. *Para uma dada solução $t \mapsto \Phi(t, x_0)$ do sistema* (1)*, se a função $t \mapsto V(\Phi(t, x_0))$ é limitado para $t > 0$, então a solução $\Phi(t, x_0)$ também é limitada para $t > 0$.*

A simples existência de uma FEG tem implicações importantes sobre o comportamento das trajetórias do sistema (ver [1]). Por exemplo, toda trajetória sobre a fronteira da região de estabilidade é limitada e converge para um conjunto que intersecta a fronteira do conjunto C (ver Teorema 4.3 de [1]).

2 A Parte Relevante da Fronteira da Região de Estabilidade

Ao se obter uma estimativa para uma parte relevante da fronteira da região de estabilidade, é desejável que ela seja conservadora, ou seja, a solução do sistema perturbado deve intersectar a estimativa da fronteira da região de estabilidade antes de intersectar a fronteira da região de estabilidade verdadeira. Desta forma, a estimativa permite afirmar com certeza se o sistema suporta uma dada perturbação.

Definição 2.1. *Considere o sistema* (2)*. Ao menor tempo t tal que $\Phi(t, x) \in \partial A(\sigma)$ e $\Phi(t + \varepsilon, x) \notin \overline{A(\sigma)}$ para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, dá-se o nome de* tempo crítico *e denota-se por t_c. Além disso, $\Phi(t_c, x)$ é chamado* exit-point.

Para garantir a existência do *tempo crítico* e do *exit-point*, é necessário supor que o ponto x_0 pertença a $A(\sigma)$ e que a trajetória do sistema perturbado se afaste de σ tanto quanto necessário para cruzar a fronteira de $A(\sigma)$. Ambas hipóteses são bastante razoáveis em diversas aplicações.

Dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$, definimos o conjunto

$$\mathcal{W}^s(B) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \overline{\Phi^+(t, x)} \cap B \neq \varnothing\right\},$$

onde $\Phi^+(t, x)$ denota a trajetória futura de x, ou seja, $\Phi^+(t, x) = \{\Phi(t, x), t \geq 0\}$.

Com a notação acima, podemos enunciar os seguintes resultados.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0357

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Teorema 2.1. *Considere que o sistema* (1) *possua um conjunto atrativo σ e que admita uma FEG, denotada por $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tomando $\Lambda = \{i \in \mathbb{N} : C_i \cap \partial A(\sigma) \neq \varnothing\}$, tem-se*

$$\partial A(\sigma) \subset \bigcup_{i \in \Lambda} \mathcal{W}^s(C_i),$$

A demonstração deste resultado segue diretamente do Teorema 4.3 de [1].

Teorema 2.2. *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 2.1 e seja $x \in \partial A(\sigma)$. Se $\Phi^+(x) \cap C = \varnothing$, então $\omega(x) \subset C_i$, para algum $i \in \Lambda = \{i \in \mathbb{N} : C_i \cap \partial A(\sigma) \neq \varnothing\}$.*

Demonstração. Tome $x \in \partial A(\sigma)$. Pela Proposição 4.2 de [1], $\omega(x)$ é conjunto invariante não-vazio e conexo.

Por hipótese, $\Phi^+(x) \cap C = \varnothing$ portanto $t \mapsto V(\Phi(t, x))$ é uma função decrescente limitada por baixo (ver Proposição 4.1 de [1]). Seja $L \in \mathbb{R}$ o limite de $V(\Phi(t, x))$ quando $t \to \infty$. Uma vez que $\omega(x)$ é invariante, $V(\omega(x)) = L$ implicando que $\dot{V}(\omega(x)) = 0$ e, assim, $\omega(x) \subset C$.

Como $\omega(x)$ é conexo, existe uma única componente conexa C_i, tal que $\omega(x) \subset \partial C_i$. $\square$

Considere o sistema (2) de tal forma que as hipóteses to Teorema 2.1 sejam satisfeitas.

Para cada $x \in \partial A(\sigma)$, seja $\{C_j, j \in \Lambda_x\}$ o conjunto de todos as componentes conexas de C tais que $C_j \cap \partial A(\sigma) \neq \varnothing$ e $x \in \mathcal{W}^s(C_j)$. Pelo Teorema 2.1, $\Lambda_x \neq \varnothing$.

Para cada $j \in \Lambda_x$, ou $\omega(x) \cap C_j \neq \varnothing$ ou $\Phi^+(x) \cap C_j \neq \varnothing$.

Se $\Phi^+(x) \cap C_j \neq \varnothing$, seja $t_j = \min\{t > 0 : \Phi(t, x) \in C_j\}$ e defina o *conjunto de controle* relativo a x como sendo a componente C_j para a qual o menor t_j ocorra. No caso em que $\Phi^+(x) \cap C_j = \varnothing$, pelo Teorema 2.2, Λ_x é um conjunto unitário. Então, o único C_j com $j \in \Lambda_x$ é definido como o *conjunto de controle* relativo a x.

Denotaremos por C_x o conjunto de controle relativo ao ponto x.

Vejamos a definição de *parte relevante* da fronteira de estabilidade neste contexto.

Definição 2.2. *A* parte relevante *da fronteira da região de estabilidade é o conjunto dos pontos de $\partial A(\sigma)$ para os quais o conjunto de controle é o mesmo do exit-point.*

Considere $\bar{x} \in \partial A(\sigma)$ e defina o *valor crítico de energia generalizada* por

$$K_{\bar{x}} = \min_{x \in \partial C_{\bar{x}}} V(x).$$

Note que $V(\bar{x}) \geq K_{\bar{x}}$ para todo $\bar{x} \in \partial A(\sigma)$.

3 Algoritmo Conceitual

Para que uma estimativa da parte relevante da fronteira da região de estabilidade possa ser obtida com base nos resultados apresentados, é necessária uma forma de detectar quando a trajetória do sistema perturbado se aproxima da fronteira da região de estabilidade.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0357

A dificuldade em se realizar tal detecção também é encontrada no método CUEP, onde é superada através de métodos computacionais (ver [5, 6]) que fornecem uma estimativa preliminar para a fronteira.

O leitor pode se perguntar: por que aplicar um método para estimar uma parte da fronteira da região de estabilidade quando, *a priori*, se precisa de uma estimativa preliminar? A resposta está nas vantagens em se obter uma estimativa conservadora. Através dela, é possível garantir se o sistema é capaz de suportar à perturbação.

Uma classe importante de sistemas em que tal estimativa inicial pode ser encontrada, é a dos sistemas quase-hamiltonianos. Neste caso, as curvas de nível da função hamiltoniana associada podem ser usadas para fornecer a estimativa inicial necessária. Ver seção 4.

Baseado nos resultados da seção 2, o seguinte algoritmo pode ser aplicado para se obter o tempo máximo em que uma perturbação pode ser aplicada a um sistema de tal forma que ele a suporte.

1. Encontre as componentes conexas do conjunto C;
2. Integre o sistema perturbado até que a solução se aproxime da estimativa inicial da fronteira de estabilidade do conjunto atrativo σ. Defina este ponto como $\bar{x}$;
3. Integre o sistema pós-perturbação até que a solução toque ou esteja suficientemente próxima de algum C_i. Defina este conjunto como o conjunto de controle $C_{\bar{x}}$.
4. Encontre o menor valor de energia na fronteira de $C_{\bar{x}}$ e defina o valor de energia crítica $K_{\bar{x}}$.
5. Se a $V(\sigma) < K_{\bar{x}}$, então a curva de nível $V(x) = K_{\bar{x}}$ é uma estimativa para a parte relevante da fronteira da região de estabilidade e o primeiro instante para o qual a trajetória do sistema perturbado intersecta esta curva de nível fornece uma estimativa conservadora para o tempo crítico t_c.

4 Exemplo

Considere a função $H(x, y) = y^3 - y + x^2 + y^2$ e o sistema (2) com

$$f(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} - 0.1(y^2+1)\right) = \left(3y^2 + 2y - 1, -2x - 0.1(y^2+1)\right), \qquad (4)$$

e

$$\tilde{f}(x, y) = \left(3y^2 + 2y - 1, -0.1(y^2+1)\right). \qquad (5)$$

O retrato de fase do sistema pós-perturbação é mostrado na Figura 1. Os pontos $p_0 = (-1/18, 1/3)$ e $p_1 = (-1/10, -1)$ são, respectivamente, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e um ponto de equilíbrio do tipo sela.

Suponha que o sistema (2) esteja em estado de equilíbrio, correspondente ao ponto p_0, quando a perturbação ocorre.

Como o sistema pós-perturbação é quase-hamiltoniano, o conjunto de nível da função H ao qual pertence o ponto crítico $x_1 = (0, -1)$ fornece uma estimativa para a fronteira

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0357

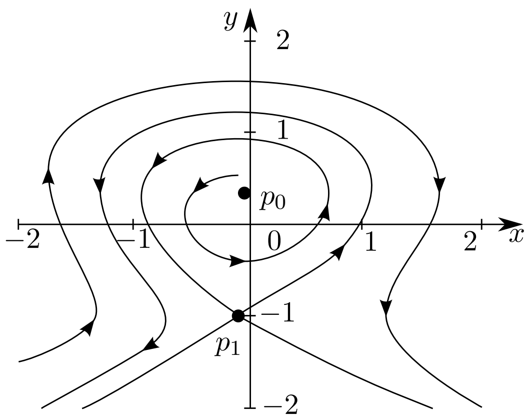

Figura 1: Retrato de fase do sistema quase-hamiltoniano definido por (4) e (5).

de estabilidade do ponto de equilíbrio assintoticamente estável p_0. Porém, a estimativa não é conservadora. A Figura 2 mostra como a estimativa obtida através da curva de nível $H(x, y) = H(x_1)$ se compara com a fronteira da região de estabilidade verdadeira.

Agora, de posse da seguinte FEG para o sistema pós-perturbação,

$$\begin{aligned} V(x,y) = {} & 1.337x - 12.077y + 12.242x^2 - 0.803xy + 12.396y^2 + 0.683x^3 - 0.443x^2y \\ & + 1.069xy^2 + 11.323y^3 + 0.109x^4 + 1.111x^3y + 0.459x^2y^2 + 1.7909xy^3 \\ & + 0.064y^4 - 0.270x^5 - 1.467y^2x^3 + 0.245x^2y^3 - 1.135y^4x + 0.582y^5, \end{aligned} \tag{6}$$

podemos aplicar o algoritmo da seção 3, obtendo $t_c = 2,1$.

A Figura 2 mostra uma comparação entre a estimativa encontrada pelo algoritmo proposto e a região de estabilidade real. Note que, embora a estimativa seja relativamente menor que a região de estabilidade real, a estimativa é conservadora, o que não ocorre utilizando a função H.

5 Conclusões

O método apresentado se mostra bem sucedido na obtenção de estimativas conservadoras para partes relevantes da fronteira da região de estabilidade para sistemas dinâmicos que admitem FEG. Uma vez que a classe de sistemas que admitem FEG é mais ampla do que aquela que admite função energia, acredita-se que com o surgimento de métodos como o apresentado neste trabalho, técnicas bastante eficazes e eficientes para análise de estabilidade de sistemas não lineares se tornem disponíveis para sistemas com dinâmica mais complicada.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte a este trabalho (número 305486/2013-6).

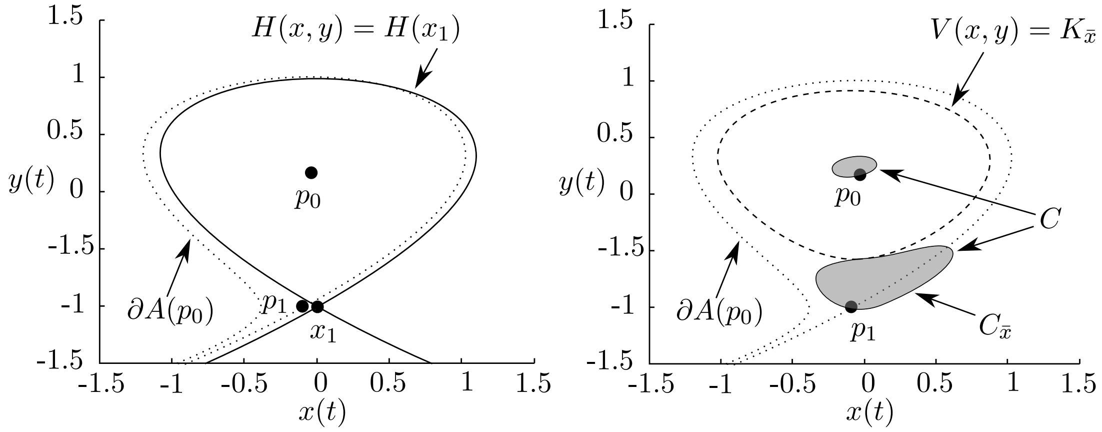

Figura 2: Comparação entre as estimativas obtidas através de um conjunto de nível de H (à esquerda) e através do algoritmo proposto(à direita).

Referências

[1] L. F. C. Alberto and H.-D. Chiang. Characterization of stability region for general autonomous nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6):1564–1569, 2012.

[2] L. F. C. Alberto and H.-D. Chiang. Towards development of generalized energy functions for electric power systems. *IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pages 1–6, 2012.

[3] A. Chakraborty, P. Seiler, and G. J. Balas. Nonlinear region of attraction analysis for flight control verification and validation. *Control Engineering Practice*, 19(4):335–345, 2011.

[4] H.-D. Chiang. Study of the existence of energy functions for power systems with losses. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 36(11):1423–1429, 1989.

[5] H.-D. Chiang. The bcu method for direct stability analysis of electric power systems: Theory and applications. *IMA Volumes in Mathematics and Its Applications*, 64:39–39, 1995.

[6] H.-D. Chiang. *Direct Methods for Stability analysis of Electric Power Systems*. Wiley, 2011.

[7] H.-D. Chiang, F. F. Wu, and P. P. Varaiya. Foundations of direct methods for power system transient stability analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34(2):160–173, 1987.

[8] H. Hethcote, M. Zhien, and L. Shengbing. Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases. *Mathematical Biosciences*, 180:141–160, 2002.

