Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Derivada em escalas temporais sobre derivadas fracionárias

Berenice Camargo Damasceno[1]
Depto. de Matemática, Faculdade de Engenharia, Unesp, Ilha Solteira, SP
Luciano Barbanti[2]
Depto. de Matemática, Faculdade de Engenharia, Unesp, Ilha Solteira, SP
Lucas Ragiotto[3]
Depto. de Bioestatística, Instituto de Biociências, Unesp, Botucatu, SP

Resumo. Na década de 1980, foram introduzidas por S. Hilger as derivadas em escalas temporais para unificar dinâmicas discretas e contínuas. A definição destas derivadas se apoia na derivada usual. As derivadas fracionárias remontam ao começo do Cálculo Diferencial no século XVIII. Neste trabalho definimos as derivadas em escalas temporais relativas à classe das derivadas fracionárias conforme.

Palavras-chave. Derivadas conformes, derivadas em escalas temporais, derivadas fracionárias.

1 Introdução

1.1 As derivadas fracionárias tradicionais e conformes

As derivadas não-inteiras são objeto de estudo desde a época do surgimento do Cálculo Diferencial no século XVIII [5]. A teoria continuou a ser desenvolvida pelos séculos seguintes como um campo de bons argumentos matemáticos, até que nos últimos 30 anos houve um "boom"da teoria devido à sua eficiência em aplicações, principalmente, nas mais diversas áreas tecnológicas.

Neste período, resultados de maior visibilidade sobre derivadas fracionárias e aplicações, foram dados sob consideração das derivadas $D^\alpha f$ de Riemann-Liouville, Hadamard, Caputo, e outros, formulados via integrais fracionárias [6], levando à várias aplicações próprias como efeito de memória e/ou não-causalidade [6].

Recentemente têm sido propostas novas formulações de derivadas fracionárias na forma de limites do tipo quociente de Newton modificados. As principais são as derivadas fracionárias conformes $T^\alpha f$ de Khalil [4] e $f^{(\alpha)}$ de Katugampola [3].

Ambos os autores mostram as vantagens destas duas derivadas $T^\alpha f$ e $f^{(\alpha)}$ respectivamente em relação as derivadas $D^\alpha f$ originais (veja os detalhes na seção 2 abaixo).

[1] berenice@mat.feis.unesp.br
[2] barbanti@mat.feis.unesp.br
[3] lucasragiotto@gmail.com

1.2 Objetivos

Definimos, neste trabalho, uma derivada fracionária denotada $D_\alpha f$ e que engloba as derivadas $T^\alpha f$ e $f^{(\alpha)}$ de Khalil e Katugampola.

Após, introduzirmos as derivadas D^Δ em escalas temporais de S. Hilger [2] e definirmos a derivada em escala temporal relativa a D_α, que denotamos por D_α^Δ.

2 Propriedades das derivadas D^α e conformes

Desde a introdução das derivadas não-inteiras, ao longo dos três séculos seguintes, os pesquisadores tiveram que lidar com uma série de inconsistências na teoria e que podem ser resumidas deste modo:

a) Exceto para a derivada de Caputo, a derivada D^α de uma constante é não nula.

b) As derivadas D^α não obedecem à regra do produto. Em geral:

$$D^\alpha fg \neq gD^\alpha f + fD^\alpha g.$$

c) As derivadas D^α não obedecem à regra usual da divisão. Em geral:

$$D^\alpha(f/g) \neq (gD^\alpha f - fD^\alpha g)/g^2.$$

d) As derivadas D^α não obedecem em geral à regra da cadeia:

$$D^\alpha(fog)(t) = D^\alpha f(g(t)).D^\alpha g(t).$$

e) Não garantimos um teorema de tipo Rolle ou TVM através do uso de D^α

f) As D^α não obedecem em geral à lei do semigrupo:

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha(D^\beta f).$$

g) A definição de $D^\alpha f$ em Caputo exige que a função f seja diferenciável.

No entanto vemos em [4] e [3] que estas dificuldades não ocorrem quando temos as derivadas $T^\alpha f$ e $f^{(\alpha)}$

- A derivada T^α de Khalil [4]

  Dado $0 < \alpha < 1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua temos:

$$T^\alpha f = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}.$$

Intuitivamente falando, nesta derivada é colocada, para a aproximação de ϵ à origem, uma escala dependente do tempo.

- A derivada $f^{(\alpha)}$ de Katugampola [3]

  Dado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $0 < \alpha < 1$

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(te^{\epsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\epsilon}.$$

Ambos os autores mostram que as derivadas $D^{\alpha}f$ e $T^{\alpha}f$ por um lado, e $D^{\alpha}f$ e $f^{(\alpha)}$ por outro, são idênticas par as funções fundamentais $f(t) = a^t$, $sen(t)$, $cos(t)$, exceto no caso em que diferem por uma constante:

$$T^{\alpha}t^n = (t^n)^{(\alpha)} = nt^{n-\alpha} \text{ para } n = 1, 2, ... \text{ e } 0 < \alpha < 1,$$

3 Uma derivada fracionária D_α geral

Vamos em direção, agora, a um dos objetivos principais deste trabalho. Seja $0 < \alpha < 1$, $\epsilon > 0$ e $\varphi(t, \epsilon, \alpha)$ contínua nas três variáveis e tal que se fizermos

$$\varphi(t, \epsilon, \alpha) = h(t) \text{ para } h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ função,}$$

a variável ϵ pode ser expressa explicitamente em função de t, α e $h(t)$.

A derivada fracionária D_α é:

$$D_\alpha f(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\varphi(t, \epsilon, \alpha)) - f(t)}{\epsilon}.$$

4 Derivada em escalas temporais

Com o intuito de unificar o estudo das dinâmicas para sistemas tanto contínuos como discretos, foram introduzidos no trabalho de S. Hilger [2] o cálculo em escalas temporais. A aplicação à dinâmica de sistemas foi praticamente sendo desenvolvida, por M.Bohner [1].

Uma escala temporal T é um subconjunto fechado não vazio de números reais.

Os operadoes fundamentais na teoria são os operadores sucessor,

$$\sigma(t) = inf\,\{s \in T; s > t\},$$

e o operador antecessor,

$$\varsigma(t) = sup\,\{s \in T; s < t\}.$$

Define-se também o operador $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

A derivada $D^{\Delta}f$ ou f^{Δ}, a derivada delta de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é o operador(definido em termos de aproximação linear local):

$$D^{\Delta}f(t) = \begin{cases} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \text{ se } \sigma(t) \neq t \\ \\ f'(t) \text{ se } \sigma(t) = t \end{cases}.$$

Com o intuito de definir uma derivada em escalas temporais sobre D_α faremos as seguintes trocas de variáveis: seja $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função sucesso e definamos

$$\varphi(t, \epsilon, \alpha) = \sigma(t). \tag{1}$$

Então pela propriedade de φ, temos

$$\epsilon = \psi(t, \alpha, \sigma). \tag{2}$$

Definimos também

$$\epsilon = \mu(t).g(t, \alpha, \sigma). \tag{3}$$

Vamos sintetizar g de tal modo que segundo (2) e (3)

$$\psi(t, \alpha, \sigma) = \mu(t).g(t),$$

ou

$$g(t) = \frac{\psi(t, \alpha, \sigma)}{\mu(t)}. \tag{4}$$

4.1 Substituições na derivada de Khalil $T^\alpha f$

Por (1), temos neste caso:

$$t + \epsilon t^{1-\alpha} = \varphi(t, \epsilon, \alpha) = \sigma(t), \tag{5}$$

e

$$\epsilon = \mu(t).g(t, \alpha, \sigma). \tag{6}$$

Sintetizando $g(t)$ através de (5) e (6) temos neste caso,

$$g(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}. \tag{7}$$

4.2 Substituição no caso da derivada de Katugampola $f^{(\alpha)}$

Por (1) temos para $t > 0$:

$$te^{\epsilon t^{-\alpha}} = \sigma(t), \tag{8}$$

e

$$\epsilon = \mu(t).g(t, \alpha, \sigma). \tag{9}$$

Sintetizando g através de (8) e (9), vem:

$$g(t, \alpha, \sigma) = \frac{t^\alpha . ln(\frac{\sigma(b)}{t})}{\sigma(t) - t}.$$

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

4.3 A derivada em escalas temporais D_α^Δ

Seguindo a expressão de $D^\Delta f$ acima, vamos definir a derivada delta relativamente à D^α, sobre a escala temporal T, como

$$D_\alpha^\Delta f(t) = \begin{cases} D_\alpha f(t) & \text{se } \sigma(t) = t \\ \frac{1}{g(t)} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} & \text{se } \sigma(t) \neq t, g(t) \neq 0 \end{cases} .$$

Observação:

1. Se $\sigma(t) \neq t$, $D^\alpha f(t) = \frac{1}{g(t)} D^\Delta f(t)$,
2. $D^\Delta = D_1^\Delta$, pois no caso das derivadas em escala de tempo D^Δ podemos, extrapolando o intervalo $(0, 1)$, fazer $\alpha = 1$.

No caso de $T^\alpha f$ e $f^{(\alpha)}$ temos então as definições para uma escala temporal T,

$$D_\alpha^\Delta f(t) = \begin{cases} \lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha} - f(t)}{\epsilon} & \text{se } \sigma(t) = t \\ t^{1-\alpha} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} & \text{se } \sigma(t) \neq t \end{cases} ,$$

e

$$D_\alpha^\Delta f(t) = \begin{cases} \lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{f(te^{\epsilon t^{-\alpha}}}{\epsilon} & \text{se } \sigma(t) = t \\ \frac{1}{t^\alpha ln(\frac{\sigma(t)}{t})} (f(\sigma(t)) - f(t)) & \text{se } \sigma(t) \neq t \end{cases} .$$

respectivamente.

Como exemplo, se tivermos $T = \mathbb{Z}$, então:

$$D_\alpha^\Delta f(t) = t^{1-\alpha}(f(t+1) - f(t)),$$

no caso de derivada de Khalil, T^α. No caso de derivada $f^{(\alpha)}$ observamos que D_α^Δ não está definido para $t \neq 0$.

5 Conclusão

Este trabalho introduz uma nova gama bastante ampla na consideração de fenômenos discretos, principalmente. É nesta linha que pretendemos seguir, a partir daqui.

Referências

[1] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic equations on Time Scales*, Birkhauser, Boston, 2001.

[2] S. Hilger, *Analysis on measure chains: a unified approach to continuous and discrete calculus Results*, Math., 18:18-56, 1990.

[3] U. N. Katugampola, *A new approach to generalized fractional derivatives*, B. Math. Anal. App., 6(4), 1-15, 2014. ISSN: 1821-1291.

[4] R. Khalil, M. A. Horani, A. Yousef, M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math., 264, 65-70, 2014.

[5] A. Kilbas, M. H. Srivastava , J. J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies, 204, 2006.

[6] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, Califórnia, 1999.

