Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Dualidade em modelos de seleção de carteiras de investimento

Patricia Reis Martins[1]
CEFET-Maracanã, Rio de Janeiro, RJ
Patrícia Nunes da Silva[2]
Departamento de Análise Matemática, UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Carlos Frederico Vasconcellos[3]
UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. O princípio de maximização da utilidade esperada está sempre subjacente aos modelos de seleção de carteiras de investimento. Na dedução dos modelos, são considerados momentos centrais da distribuição de retornos dos ativos e é feita uma análise do comportamento da função utilidade em relação a esses momentos. Essa análise é conduzida sob a condição *ceteris paribus* ("tudo o mais constante") e são obtidos os problemas de otimização associados aos modelos. Além da discussão sobre existência de solução, os economistas estão interessados na caracterização de regiões em que o problema de otimização e seus duais estejam bem postos. Discutiremos a região de dualidade do problema de minimização da variância quando estão fixados o retorno e a assimetria e seu dual, maximização da assimetria quando estão fixados o retorno e a variância. Analisaremos aqui essa região de interesse através de uma análise de sistemas lineares associados aos multiplicadores desses dois problemas de otimização. Faremos uma caracterização completa dos sistemas incluindo os casos degenerados.

Palavras-chave. Seleção de carteiras de investimento, momentos de ordem superior, dualidade, fronteira eficiente.

1 Introdução

A máxima "não coloque todos os ovos em uma mesma cesta" norteia os investidores ao decidirem como distribuir seu capital entre as aplicações financeiras que compõem sua carteira de investimento (ou portfólio). Em 1952, o economista Markowitz [3] apresentou um modelo matemático que confirma esta máxima: ao investir, é fundamental diversificar. Usando os parâmetros média e variância observados nos retornos dos ativos, ele determinou a melhor escolha para a distribuição do capital a ser investido de acordo com o perfil de risco do investidor. Contudo, estudos posteriores apontaram para inconsistências neste modelo visto que a distribuição dos retornos de ativos raramente segue um padrão de distribuição normal. Sendo assim, seria necessário considerar além da média e variância, outros parâmetros como a assimetria e a curtose da distribuição dos retornos nestes ativos.

[1]patriciarm75@yahoo.com.br
[2]nunes@ime.uerj.br
[3]cfredvasc@ime.uerj.br (Professor Visitante UERJ / FAPERJ)

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Diversos trabalhos de pesquisa discutem a incorporação de momentos de ordem superior a modelos de seleção de carteiras eficientes. Athayde e Flôres [1] modelaram o problema de seleção de carteiras eficientes, utilizando os parâmetros de média, variância e assimetria da distribuição dos retornos.

O princípio de maximização da utilidade esperada está sempre subjacente aos modelos de seleção de carteiras de investimento. Além disso, os problemas de otimização associados a esses modelos correspondem à análise do comportamento da função utilidade em relação a cada um dos momentos considerados sob a condição *ceteris paribus* ("tudo o mais constante"). Desse modo, além da discussão sobre existência de solução, os economistas estão interessados na caracterização de regiões em que o problema de otimização e seus duais estejam bem postos.

Com relação ao problema de minimização da variância quando estão fixados o retorno e a assimetria, Athayde e Flôres [1] discutiram a região de dualidade a partir do estudo de sinais dos multiplicadores de Lagrange associados ao problema de otimização para caracterizar a região em que uma solução desse problema de minimização também seria solução do problema dual: maximização da assimetria quando estão fixados o retorno e a variância. Analisaremos aqui essa região de interesse através de uma análise de sistemas lineares associados aos multiplicadores desses dois problemas de otimização. Faremos uma caracterização completa dos sistemas incluindo os casos degenerados que não foram tratados por Athayde e Flôres [1]. Avançamos assim na análise matemática do modelo de Athayde e Flôres [1] feita em Martins, Vasconcellos e Silva [4–6] ao atacar questões deixadas em aberto. Concentramo-nos agora na discussão sobre a dualidade a partir dos sistemas lineares associados aos multiplicadores dos problemas condicionados de minimização da variância e o seu dual, de maximização da assimetria. Essa abordagem permite uma compreensão mais profunda da conexão entre esses dois problemas de otimização.

2 O modelo de Athayde e Flôres

Em resposta à necessidade de incorporar momentos de ordem superior a modelos de seleção de carteiras de investimento, Athayde e Flôres [1] propuseram o seguinte modelo para n ativos de risco e um livre de risco.

$$\begin{cases} \min\limits_{\alpha} \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t x = R \end{cases}, \tag{1}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de pesos dos ativos com risco; M_2 é a matriz $n \times n$ de covariâncias entre os retornos dos ativos; M_3 é a matriz $n \times n^2$ associada ao tensor de terceiros momentos dos retornos dos ativos; cada coordenada do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é o retorno médio excedente do i-ésimo ativo de risco e $\otimes$ denota o produto de Kronecker. Em [6], Martins provou existência de solução para o problema (1). Em (1), a carteira ótima é obtida pela minimização da variância ($\alpha^t M_2 \alpha$) quando estão fixados os momentos de ordem um e três. Isto é, quando estão fixados os valores do retorno ($\alpha^t x$) e da assimetria ($\alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha)$).

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0352

3 O problema dual

Seja α_* uma solução de (1). O problema dual associado ao modelo de Athayde e Flôres [1] é dado por

$$\begin{cases} \max\limits_{\alpha} \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma^*_{p^2} \\ \alpha^t x = R \end{cases}, \tag{2}$$

onde $\sigma^*_{p^2} = \alpha^t_* M_2 \alpha_*$. Em (2), a carteira ótima é obtida pela maximização da assimetria $(\alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha))$ quando estão fixados os momentos de ordem um e dois. Isto é, quando estão fixados os valores do retorno $(\alpha^t x)$ e da variância $(\alpha^t M_2 \alpha)$ Martins [5] provou existência de solução para o problema (2) e obteve para o problema (2), resultados análogos aos de Athayde e Flôres [1] para o problema (1).

4 Sistemas para os multiplicadores

Para deduzir sistemas lineares associados aos multiplicadores para os problemas (1) e (2), vamos utilizar o resultado de Fritz-John ([2, p. 177], [8, p. 441]) para problemas de otimização com restrições de igualdade.

Teorema 4.1. *Sejam U um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_q$, $q+1$ funções reais definidas em U e continuamente diferenciáveis em $a \in U$. Se a é um ponto de mínimo de ϕ_0 sujeita às restrições $\phi_1 = \cdots \phi_1 = 0$, existem reais $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ (não todos nulos) tais que $\lambda_0 \geq 0$ e*

$$\lambda_0 \nabla \phi_0(a) - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \nabla \phi_i(a) = (0, \ldots, 0).$$

Pelo Teorema 4.1, toda solução do problema (1) deve satisfazer

$$2\lambda_0 M_2 \alpha = 3\lambda_1 M_3(\alpha \otimes \alpha) + \lambda_2 x. \tag{3}$$

Usando as restrições associadas ao problema, podemos deduzir o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} A_4 & A_2 \\ A_2 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_0 \sigma_{p^3} \\ 2\lambda_0 R \end{bmatrix}, \tag{4}$$

onde

$$A_0 = x^t M_2^{-1} x,$$
$$A_2 = x^t M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha),$$
$$A_4 = (\alpha \otimes \alpha)^t M_3^t M_2^{-1} M_3(\alpha \otimes \alpha).$$

Denotaremos por A_F a matriz dos coeficientes do sistema linear associado a (4). Athayde e Flôres [1] provaram que

$$A_0 \det A_F = \{M_3(\alpha \otimes \alpha) A_0 - x A_2\}^t M_2^{-1} \{M_3(\alpha \otimes \alpha) A_0 - x A_2\}. \tag{5}$$

Analogamente, toda solução do problema (2) deve satisfazer

$$3\gamma_0 M_3(\alpha \otimes \alpha) = 2\gamma_1 M_2 \alpha + \gamma_2 x$$

Usando as restrições associadas ao problema, podemos deduzir o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2R & A_0 \\ 2\sigma^*_{p^2} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\gamma_0 A_2 \\ 3\gamma_0 \alpha^t M_3(\alpha \otimes \alpha) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Denotaremos por A a matriz dos coeficientes do sistema linear associado a (6). Martins [6] provou que

$$\sigma^*_{p^2} \det A = \{\sigma^*_{p^2} M_2^{-1} x - R\alpha\}^t M_2 \{\sigma^*_{p^2} M_2^{-1} x - R\alpha\}. \tag{7}$$

Quando o determinante da matriz dos coeficientes é não nulo, sem perda de generalidade, podemos considerar o multiplicador associado à função objetivo igual a 1 e estamos nas condições usuais dos multiplicadores de Lagrange. Para o caso degenerado quando o determinante da matriz dos coeficientes se anula, observamos que como M_2 é a matriz de covariância, ela é positiva definida. Este fato permite com o auxílio das relações (5) e (7), a análise dos casos degenerados.

5 Conclusões

No modelo de Markowitz [3], são considerados apenas os dois primeiros momentos e a carteira ótima é determinada pela minimização da variância para um valor de retorno fixado. Neste caso temos um problema de otimização quadrática e a solução única do sistema é dada por $\alpha_M = \frac{RM_2^{-1}x}{A_0}$.

Sob a perspectiva econômica, há interesse em caracterizar a chamada fronteira eficiente: região em que se verifica a dualidade. No modelo de Markowitz, a dualidade entre o problema de minimizar a variância fixado o retorno e o de maximizar o retorno fixada a variância repousa em resultados clássicos (veja, por exemplo, [7, Theorem 9.12, p. 210]). Para o modelo que considera os três primeiros momentos: média, variância e assimetria, a dualidade nos diz que uma carteira ótima tanto pode ser obtida pela minimização da variância quando estão fixados a assimetria e o retorno como pela maximização da assimetria quando estão fixados a variância e o retorno. Martins [5, 6] estabeleceu um resultado de dualidade para o problema de maximização da assimetria fixados retorno e variância mas não apresentou o estudo de sinal dos multiplicadores que caracterizaria a região de dualidade. Em [1], Athayde e Flôres provaram um resultado de dualidade que exige o conhecimento do sinal dos multiplicadores. Eles não contemplaram os casos degenerados e algumas das proposições que fundam a análise de sinal dos multiplicadores necessitam pequenas revisões. Para obter a fronteira eficiente, é necessário caracterizar o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contém todas as soluções α_* de (1) associadas ao par de restrições $(R^*, \sigma^*_{p^3})$ que também são soluções de (2) associadas ao par de restrições $(R^*, \sigma^*_{p^2})$, onde $\sigma^*_{p^2} = \alpha_*^t M_2 \alpha_*$. A fronteira eficiente também deve coincidir com o conjunto de soluções α_* de (2) associadas ao par de restrições $(R^*, \sigma^*_{p^2})$ que também são soluções de (1) associadas ao par de restrições $(R^*, \sigma^*_{p^3})$, onde $\sigma^*_{p^3} = \alpha_*^t M_3(\alpha_* \otimes \alpha_*)$.

Nossa análise da dualidade dos problemas (1) e (2) é feita a partir dos sistemas (4) e (6). Procedemos por exaustão e usamos as formas quadráticas (5) e (7) associadas respectivamente aos determinantes das matrizes dos coeficientes A_F e A. Além disso, fazemos uso da existência de solução dos problemas (1) e (2) estabelecida por Martins, Vasconcellos e Silva [4–6]. A estrutura de nosso argumento consiste basicamente em considerar uma solução α_* de um dos problemas (1) ou (2) e discutir se ela resolve o sistema linear (6) ou (4) respectivamente. Quando α_* não resolve o sistema, concluímos que este vetor não pertence à região de dualidade pois não há solução simultânea dos problemas (4) e (6). No caso afirmativo, a dualidade é viável. Do ponto de vista econômico, subjacente aos problemas (1) e (2), temos o princípio de maximização da função utilidade: o investidor irá optar pela carteira de investimentos que maximiza sua função utilidade. Scott e Horvath [9] provaram que quando fixados assimetria e retorno, a utilidade é maximizada quando se minimiza a variância e se fixados variância e retorno, a utilidade é maximizada quando se maximiza a assimetria. Podemos interpretar a eficiência de uma carteira pela maximização da função utilidade. Desse modo, fixados assimetria e retorno, uma carteira só será eficiente se não houver nenhuma outra com variância menor. Analogamente, fixados variância e retorno, uma carteira só será eficiente se não houver nenhuma outra com assimetria maior.

Analisaremos em detalhe os casos degenerados. Lembramos que os problemas (1) e (2) admitem solução. Considere um elemento α_* do conjunto factível do problema (2) associado ao par de restrições $(R^*, \sigma^*_{p^2})$ tal que o determinante de A seja nulo. Isto é,

$$2(\sigma^*_{p^2} A_0 - R^2) = 0. \tag{8}$$

Observe que por (7) e (8), temos

$$\alpha_* = \frac{\sigma^*_{p^2} M_2^{-1} x}{R} = \frac{R M_2^{-1} x}{A_0}.$$

Portanto, há uma única solução do problema (6). Consequentemente, a solução de (2) para o par $(R^*, \sigma^*_{p^2})$ é única. Por outro lado, α_* coincide com a solução clássica de Markowitz para o problema de minimizar a variância quando o retorno está fixado em R^*. Logo, α_* é também solução única de (1) associada ao par de restrições $(R^*, \sigma^M_{p^3})$, com $\sigma^M_{p^3}$ a assimetria de α_*: $\sigma^M_{p^3} = \alpha_*^t M_3(\alpha_* \otimes \alpha_*)$. Vimos que o caso em que o determinante de A é nulo está associado à solução clássica de Markowitz para o problema de minimizar a variância quando o retorno está fixado em R^*. É possível mostrar que o vetor α_* é ortogonal a $M_3(\alpha_* \otimes \alpha_*)A_0 - xA_2(\alpha_*)$.

Considere uma solução $\alpha_\star$ do problema (1) associada ao par de restrições $(R^\star, \sigma^\star_{p^3})$ tal que o determinante de A_F (calculado para $\alpha_\star$) seja nulo. Isto é,

$$A_0 A_4 - A_2^2 = 0. \tag{9}$$

Tratamos separadamente o caso em que A_2 se anula ou não em $\alpha_\star$. Para $A_2 = A_2(\alpha_\star) \neq 0$, resolvendo o sistema (4) e usando (3), deduzimos que

$$\alpha_\star = \frac{R M_2^{-1} x}{A_0}.$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0352

Para $A_2 = 0$, podemos concluir que $M_3(\alpha_\star \otimes \alpha_\star)$ e novamente usando (4) e (3), deduzimos que

$$\alpha_\star = \frac{RM_2^{-1}x}{A_0}.$$

Isto é, $\alpha_\star$ coincide com a solução clássica de Markowitz para o problema de minimizar a variância quando o retorno está fixado em $R^\star$. Portanto, há uma única solução do problema (1)para o par $(R^\star, \sigma^\star_{p^3})$. Note que no problema (2) associado ao par de restrições $(R^\star, \sigma^F_{p^2})$, com $\sigma^F_{p^2}$ a variância de $\alpha_\star$: $\sigma^F_{p^2} = \alpha^t_\star M_2 \alpha_\star$, há apenas um elemento no conjunto factível e além disso, o determinante de A se anula.

Em resumo, procedendo exaustivamente, no caso degenerado $\det A_F = \det A = 0$, há apenas vemos que a única solução dos problemas de otimização (1) e (2) coincide com a solução do problema clássico de Markowitz. Exceto no caso em que a solução clássica de Markowitz α_M é ortogonal ao vetor $M_3(\alpha_M \otimes \alpha_M)A_0 - xA_2(\alpha_M)$, quando $\det A_F \cdot \det A = 0$ e os determinantes não se anulam simultaneamente, não há solução simultânea dos dois problemas e estamos fora da região de dualidade. Nos casos em que $\det A_F \cdot \det A \neq 0$, podemos tomar $\lambda_0 = \gamma_0 = 1$, temos necessariamente $\lambda_1\gamma_1 \neq 0$ e a solução dos problemas é diferente da solução do problema clássico de Markowitz. Aqui o fato de $\lambda_1\gamma_1 \neq 0$ permite que relacionemos diretamente as soluções dos sistemas (4) e (6) explorando o fato de podermos expressá-las em estruturas de ponto fixo e também o conhecimento de fórmulas explícitas para os multiplicadores correspondentes.

Referências

[1] G. M. Athayde e R. G. Flôres Jr., Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three-moments portfolio choice, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28:1335-1352, 2004.

[2] C. Carathéodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, American Mathematical Society, 1999.

[3] H. Markowitz, Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7:77-91, 1952.

[4] P. R. Martins, C. F. Vasconcellos e P. N. Silva, Análise de Modelos de Seleção de Carteiras de Investimento, *Cadernos do IME - Série Matemática*, 8: 11-38, 2014.

[5] P. R. Martins, Aplicação de Teorema de Ponto Fixo a um Modelo de Seleção de carteiras de Investimento, Dissertação de Mestrado, UERJ, 2015.

[6] P. R. Martins, Seleção de carteiras de investimento através da maximização da assimetria. Trabalho de Conclusão de Curso, UERJ, 2016.

[7] M. J. Panik, *Classical Optimization: Foundations and Extensions*, North-Holland Pub. Co., 1976.

[8] B. H. Pourciau, Modern Multiplier Rules, *The American Mathematical Monthly*, 87: 433-452, 1980.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0352

[9] R. C. Scott e P. A. Horvath, On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance, *The Journal of Finance*, 35: 915-919, 1980.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0352