Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resolvedo problemas de despacho econômico com dados incertos usando enfoque paramétrico dual

Ricardo Coelho[1]
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará
Av. Mister Hull, s/n, Campus do Pici, Bloco 910,
60440-900, Fortaleza, CE, Brazil

Resumo. Imprecisões também são encontradas de forma natural em situações do cotidiano que requerem uma solução realística. A iniciativa de modelar matematicamente as imprecisões em problemas de otimização da vida real é aplicado em uma crescente variedade de campos práticos. Conhecendo a importância desse tema, o objetivo desse trabalho é apresentar um enfoque paramétrico dual para resolver problemas de programação quadrática com uma relação de ordem imprecisa ou coeficientes incertos no conjunto de restrições. O enfoque proposto é aplicado ao problema de despacho econômico, que sequencia uma geração de energia elétrica no intuito de satisfazer a demanda e minimizar os custos.

Palavras-chave. Lógica nebulosa, otimização quadrática, dual enfoque, programação matemática nebulosa.

1 Introdução

Alguns problemas práticos podem ser formulados matematicamente como um problema de otimização e seu processo de formulação é baseado em percepções humanas. Uma boa maneira de realizar esse tipo de formulação é usar técnicas de *Soft Computing* (SC), que é um conjunto de metodologias que exploram a tolerância de imprecisões e incertezas. De acordo com [8, 11], esse conjunto de metodologias combinam o uso de lógica nebulosa, neuro-computação, metaheurísticas e raciocínio probabilístico.

Esse trabalho está baseado em métodos de otimização, que pertencem à área da Programação Matemática. Um de seus sub-áreas é a Programação Quadrática, que é caracterizado por uma função objetivo quadrática e um conjunto de restrições lineares. Contudo, os coeficientes da formulação matemática podem descrever dados incertos, que podem ser representados usando a teoria de conjuntos nebulosos. Assim, um problema de programação quadrática em ambiente incerto pode ser descrito como segue

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{x}} \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \lesssim \tilde{\mathbf{b}} \\ & \tilde{\mathbf{x}} \gtrsim \tilde{\mathbf{0}}. \end{aligned} \tag{1}$$

[1] rcoelhos@dema.ufc.br

sendo $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica. Há muitos problemas reais que podem ser formulados matematicamente como problemas de programação quadrática, como por exemplo: teoria dos jogos, processamento de sinais, seleção de carteiras, localização de facilidades, entre outros.

Com isso em mente, o objetivo desse trabalho é mostrar um enfoque dual para resolver problemas de programação quadrática em amebiente nebuloso. A incerteza está presente na relaçã de ordem e/ou coeficientes no conjunto de restrições.

Esse trabalho está dividido como segue: Seção 2 apresenta o enfoque dual para resolver problemas de programação quadrática em ambiente nebuloso; Seção 3 ilustra a proposta aplicado ao problema de despacho econômico no intuito de sequenciar uma geração de energia; Finalmente, algumas conclusões sã apresentadas na Seção 4.

2 Enfoque paramétrico dual em amebiente nebuloso

Em alguns casos em programação matemática, um enfoque dual pode ser usado para verificar se a solução encontrada é ótima. Ademais, questões teóricas e técnicas computacionais podem ser muito mais simples quando a fomulação matemática dual de um problema de otimização é usada.

Os dados incertos nesse trabalho serão tratados usando a teoria de conjuntos nebulosos e uma forma de fazer a comparação entre números nebulosos é usando uma função *ranking*. De acordo com [2], há uma grande coleção de métodos já desenvolvidos nesse tema. Em [1], algumas formulações com dados imprecisos s ao apresentados e metodologias usando diferentes métodos de ordenação são propostas.

O Problema (1) pode ser reformulado como

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c^t x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x} \lesssim \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{b}}) \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

sendo $\mathcal{R}(\tilde{a}_{ij}) = \left(\frac{1}{2}(a_{ij}^L + a_{ij}^U) + \frac{1}{4}(\alpha_{ij} - \beta_{ij})\right)$ e $\mathcal{R}(\tilde{b}_j) = \left(\frac{1}{2}(b_j^L + b_j^U) + \frac{1}{4}(\sigma_j - \gamma_j)\right)$. Como a função *ranking* é linear o valor obtido por $\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x}$ é igual ao valor obtido por $\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x})$.

De acordo com [5], um problema de programação quadrática em ambiente nebuloso pode ser transformado em um problema de programação quadrática paramêtrica. Nesse caso, o parâmetro é um nível de α-corte que pertence ao intervalo (0,1]. Esse α é a imagem da função de pertinência

$$\mu_i : \mathbb{R} \to (0,1], \quad i = 1, \ldots, m$$

Cada função de pertinência representa uma restrição, que terá um nível satisfatório

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0427

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, essas funções de pertinência podem ser formuladas como segue

$$\mu_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}_i)\mathbf{x} \le b_i \\ 1 - \dfrac{\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}_i)\mathbf{x} - b_i}{p_i}, & b_i < \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}_i)\mathbf{x} \le b_i + p_i \\ 0, & \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}_i)\mathbf{x} > b_i + p_i \end{cases}$$

EntÃ£o, $\forall \alpha \in (0,1]$,

$$X(\alpha) = \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n / \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}_i)\mathbf{x} \le r_i(\alpha), \mathbf{x} \ge 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

com $r_i(\alpha) = \mathcal{R}(b_i) + d_i(1-\alpha)$. Logo, o Probleam (2) pode ser escrito como um problema de programação quadrática paramétrica.

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c^t x} + \frac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} \\ \text{s.a} & \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}_i)\mathbf{x} \le r_i(\alpha) \\ & \mathbf{x} \ge 0, \ \alpha \in (0,1], \ i = 1, \ldots, m. \end{array} \tag{3}$$

Assim, um problema de programação quadrática nebuloso pode ser parametrizado e, portanto, o enfoque dual desse problema pode ser parametrizado. Quando a dualidade lagrangeana é aplicada no Problema (5), tem-se

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{c^t x} + \frac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} + \lambda^{\mathbf{t}} \Big(\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x} - \mathbf{r}(\alpha)\Big).$$

sendo o vetor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ os multiplicadores de Lagrange e cada componente desse vetor está representa uma restrição do problema primal. Assim, obtem-se o seguinte probema de otimização associado

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) = & \ \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}} L(\mathbf{x}, \lambda) \\ = & \ \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}} \mathbf{c^t x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t Q x} + \lambda^{\mathbf{t}} \Big(\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x} - \mathbf{r}(\alpha)\Big) \end{aligned}$$

Aplicando $\nabla_x L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$, o valor mínimo para $\mathbf{x} = -\mathbf{Q}^{-1}\Big(\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}})^t \lambda + \mathbf{c}\Big)$ é obtido e substituindo esse valor na equação acima, o seguinte problema quadrático paramétrico é obtido

$$\begin{array}{lll} \max & \phi(\lambda) = & -\frac{1}{2}\Big(\lambda^{\mathbf{t}} \mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{c^t}\Big) \mathbf{Q^{-1}} \Big(\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}})^{\mathbf{t}} \lambda + \mathbf{c}\Big) - \lambda^{\mathbf{t}}(\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{b}}) + \mathbf{d}(\mathbf{1} - \alpha)) \\ & & \lambda \ge 0, \ \alpha \in (0,1]. \end{array} \tag{4}$$

A principal ideia dessa proposta é usar um problema paramétrico para obter um conjunto de soluções satisfatórias para diferentes valores de α. Por fim, o Teorema da Representação pode ser usado para associar todas as soluções obtidas para compor uma solução do problema original pela expressÃ£o abaixo

$$\tilde{S} = \bigcup_{\alpha} (1-\alpha) S(\alpha).$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0427

3 Resultados numéricos

No intuito de ilustrar a eficiência do enfoque paramêtrico dual para resolver problemas de programação quadrática em ambiente nebuloso, um problema de despacho econômico para definir um sequenciamento ótimo para geração de energia é usado nesse trabalho.

Todos os testes foram executados em um PC com 2.7GHz Intel ® Core™ i7, 16GB RAM. Os problemas apresentados nesse trabalho foram resolvidos usando a função **fmincon,** para resolver problemas de otimização restritos, do programa MATLAB® R2015a.

3.1 Problema de despacho econômico

O problema de despacho econômico sequencia uma geração de energia de maneira apropriada para satisfazer a demanda de carga enquanto minimiza o custo total de operação. Fatores ambientais, como aquecimento global e poluição, têm elevado a níveis críticos em muitos lugares. Atualmente, o uso de geração de energias renováveis tornou-se importante por reduzir a emissão de poluentes, mas a geração dessas fontes dependem de condições climáticas e, portanto, difícil de prever sua real capacidade de geração de energia.

Sem perda de generalidade, um problema de despacho econômico, considerando uma geração eólica, pode ser formulado como um problema de programação quadrática da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min \quad & FC(P_G) = \sum_{i=1}^{M} a_i + b_i P_{Gi} + c_i P_{Gi}^2 \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{M} P_{Gi} + W_{av} \geq P_D \\ & P_{Gi}^{min} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{max}, \ i = 1, \ldots, M. \end{aligned} \tag{5}$$

sendo M o número de geradores comprometidos para o sistema de geração, a_i, b_i, c_i os coeficientes de custos do i-ésimo gerador, P_{Gi} a geração de energia real do i-ésimo gerador, W_{av} a geração de energia por eólica, P_D a demanda de carga de energia, P_{Gi}^{min} e P_{Gi}^{max} os valores mínimos e máximos de geração de energia do gerador i.

3.2 Resultados e análises

Nesse trabalho, o problema de despacho econômico é resolvido usando o enfoque paramétrico dual. Esse problema de energia é baseado em um sistema de teste típico IEEE 30-bus com seis geradores, como visto em [9]. Os parâmetros do sistema incluindo coeficientes de custo do combusível e capacidade de geração estão listados na Tabela 1. A demanda de carga foi simulada em 2,834GW e a energia gerada por eólicas é 0,5668GW.

De acordo com a formulação matemática apresentada acima, o primeiro conjunto de restrições pode ter informação imprecisa sometne na relação de ordem. Assim, essa imprecisão pode ser tratada por uma relação nebulosa da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{M} P_{Gi} + W_{av} \geq_f P_D \tag{6}$$

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Tabela 1: Coeficientes de custo do combustível e capacidade de geração

Generator i	a_i	b_i	c_i	P_{Gi}^{min}	P_{Gi}^{min}
G_1	10	200	100	0,05	0,50
G_2	10	150	120	0,05	0,60
G_3	20	180	40	0,05	1,00
G_4	10	100	60	0,05	1,20
G_5	20	180	40	0,05	1,00
G_6	10	150	100	0,05	0,60

sendo que $\geq_f$ representa a incerteza da geraçã eólica e a perda de transmissão. Ele pode ser calculado baseado na fórmula de perda de Kron, que não é o foco desse trabalho.

Tabela 2: Geração de energia por enfoque primal nebuloso

α	**Decision Variables**						**FunObj**
0,0	0,0500	0,2223	0,2918	0,8612	0,2918	0,2667	419,1227
0,1	0,0500	0,2227	0,2932	0,8621	0,2932	0,2673	420,0890
0,2	0,0500	0,2258	0,3023	0,8682	0,3023	0,2709	426,3995
0,3	0,0500	0,2288	0,3114	0,8743	0,3114	0,2746	432,7325
0,4	0,0500	0,2318	0,3205	0,8803	0,3205	0,2782	439,0881
0,5	0,0500	0,2349	0,3296	0,8864	0,3296	0,2819	445,4663
0,6	0,0500	0,2379	0,3387	0,8925	0,3387	0,2855	451,8670
0,7	0,0500	0,2409	0,3478	0,8986	0,3478	0,2891	458,2902
0,8	0,0500	0,2440	0,3569	0,9046	0,3569	0,2928	464,7361
0,9	0,0500	0,2470	0,3661	0,9107	0,3661	0,2964	471,2044
1,0	0,0501	0,2500	0,3751	0,9168	0,3751	0,3001	477,6953

Tabela 3: Geração de energia por enfoque dual nebuloso

α	**Decision Variables**													**FunObj**
0,0	203,3443	6,6557	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	419,1227
0,1	203,4561	6,5439	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	420,0890
0,2	204,1846	5,8154	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	426,3995
0,3	204,9131	5,0870	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	432,7325
0,4	205,6416	4,3584	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	439,0881
0,5	206,3701	3,6299	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	445,4663
0,6	207,0986	2,9014	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	451,8670
0,7	207,8271	2,1730	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	458,2902
0,8	208,5556	1,4445	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	464,7360
0,9	209,2840	0,7161	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	471,2044
1,0	210,0108	0,0042	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0.00	477,6953

De acordo com o enfoque primal descrito em [3], a Tabela 2 apresenta a solução nebulosa obtida para o problema de despacho econômico com incerteza na relação de ordem no conjunto de restrições. Em [6] é proposta a transformação da formulação primal de um problema de prograamção quadrático com relação de ordem incerta em uma formulação dual nebulosa irrestrita. A solução nebulosa par o enfoque paramétrico dual para esse problema de despacho ecoômico está descrito na Tabela 3. Vale salientar que as soluções nebulosas obtida para ambos os enfoques, primal e kdual, são as mesmas.

Tabela 4 mostra a solução nebulosa obtida para o problema de despacho econômico com coeficientes incertos no conjunto de restrições. Nesse caso, foi-se utilizado uma função *ranking* para ordenar os números nebulosos. Em [7] é mostrado como transformar a formulação primal de um problema de programação quadrático com coeficientes nebulosos no conjunto de restrição em uma formulação dual nebulosa irrestrita usando uma função *ranking*. A solução nebulosa do enfoque dual está apresentada na Tabela 5.

4 Conclusão

Muitos problemas páticos podem ser modelados como problemas de programação quadrática. Como todo problema prático baseado em problemas reais, seus dados involvem um certo grau de incerteza e imprecisão.

A incerteza apresentada nesse trabalho está nos coeficientes e na relação de ordem no conjunto de restrições. O enfoque dual proposto foi validado resolvendo o problema de despacho econômico, que sequencia a geração de energia para minimizar o curso total de geração atendendo a demanda. Ademais, as soluções nebulosas obtidas do enfoque dual, para ambas as variações, são iguais as soluções obtidas do enfoque primal.

Acknowledgment

O autor gostaria de agradecer ao apoio financeiro da agência CNPq (projeto número 484902/2013-0)

Referências

[1] J. M. Cadenas and J. L. Verdegay, "Using ranking functions in multiobjective fuzzy linear programming," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 111, 47–53, 2000.

[2] L. Campos and J. L. Verdegay, "Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers," vol. 32, 1–11, 1989.

[3] C. CRUZ, R.C. SILVA, and J.L. VERDEGAY. Extending and relating different approaches for solving fuzzy quadratic problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 10(3):193–210, 2011.

[4] A. Izmailov and M. Solodov, *Otimização: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*, Vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.

Tabela 4: Geração de energia por enfoque primal nebuloso

α	**Decision Variables**						**FunObj**
0,0	0,0500	0,2321	0,3212	0,8808	0,3212	0,2785	439,5747
0,1	0,0500	0,2350	0,3300	0,8866	0,3300	0,2820	445,7049
0,2	0,0500	0,2380	0,3391	0,8927	0,3391	0,2856	452,1064
0,3	0,0500	0,2411	0,3482	0,8988	0,3482	0,2893	458,5305
0,4	0,0500	0,2441	0,3573	0,9049	0,3573	0,2929	464,9772
0,5	0,0500	0,2471	0,3664	0,9109	0,3664	0,2966	471,4464
0,6	0,0503	0,2501	0,3754	0,9169	0,3754	0,3002	477,9381
0,7	0,0534	0,2529	0,3836	0,9224	0,3836	0,3034	484,4511
0,8	0,0567	0,2556	0,3917	0,9278	0,3917	0,3067	490,9843
0,9	0,0600	0,2583	0,3999	0,9333	0,3999	0,3100	497,5377
1,0	0,0632	0,2610	0,4080	0,9387	0,4080	0,3132	504,1113

Tabela 5: Geração de energia por enfoque dual nebuloso

α	**Decision Variables**													**FunObj**
0,0	205,6973	4,3029	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	439,5747
0,1	206,3973	3,6026	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	445,7049
0,2	207,1258	2,8741	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	452,1064
0,3	207,8543	2,1457	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	458,5305
0,4	208,5828	1,4172	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	464,9772
0,5	209,3112	0,6888	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	471,4464
0,6	210,0354	0,0017	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	477,9381
0,7	210,6874	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	484,4511
0,8	211,3392	0,0002	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	490,9843
0,9	211,9910	0,0002	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	497,5377
1,0	212,6428	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	504,1112

[5] R. C. Silva, J. L. Verdegay, and A. Yamakami, "Two-phase method to solve fuzzy quadratic programming problem," *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, London, UK, pp. 1–6, 2007.

[6] R.C. SILVA, and A. YAMAKAMI. A dual approach to solve fuzzy quadratic programming problems. In *Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, El Paso, USA, pages 1–6, 2011.

[7] R.C. SILVA, and A. YAMAKAMI. Using ranking function in dual approach to solve quadratic programming problem under fuzzy environment. In *Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, Berkeley, USA, pages 1–6, 2012.

[8] J. L. Verdegay, R. R. Yager, and P. P. Bonissone,"On heuristic as a fundamental constituent of soft computing," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 159, no. 7, pp. 846–855, 2008.

[9] L.F. WANG and C. SINGH. Environmental/economic power dispatch usng a fuzzified multi-objective particle swarm optimization algorithm. *Electrical Power System Resource*, 77:1654–1664, 2007.

[10] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[11] L. A. Zadeh, "Soft computing and fuzzy logic," *IEEE Software*, vol. 11, no. 6, pp. 48–56, 1994.

