Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de estabilidade dos modelos fracionários de Gompertz e von Bertalanffy com derivada de Caputo

Robinson Tavoni[1]
Programa de pós-graduação em Biometris, UNESP, Botucatu, SP
Docente da área de Matemática, IFSP, Araraquara, SP
Paulo Fernando de Arruda Mancera[2]
Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP
Rubens de Figueiredo Camargo[3]
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, SP

Resumo. Este trabalho analisa a teoria de ponto de equilíbrio e de estabilidade para os modelos fracionários de von Bertalanffy e Gompertz com derivada de Caputo.

Palavras-chave. Derivada de Caputo, Estabilidade, Modelo de Gompertz Fracionário, Modelo de von Bertalanffy Fracionário.

1 Introdução

O cálculo de ordem não-inteira, mais conhecido como Cálculo Fracionário, tem sua origem em 1695 com uma troca de correspondência entre Leibniz e L'Hôspital. Após 1900 tem se desenvolvido rapidamente, como por exemplo com as novas definições de derivada fracionária. Uma dessas definições para derivada fracionária é de Caputo e, através dela, é possível modelar diversos fenômenos, pois pode dar uma melhor descrição do problema estudado quando comparado com o cálculo usual.

Recentemente o interesse pelo Cálculo Fracionário (CF) tem sido estimulado pela aplicação em diferentes campos da ciência. Na engenharia há muitas aplicaçãos de CF, como exemplo, no estudo de controle e sistema dinâmico (ver referência [8]). A equação logística fracionária tem sido usada para descrever crescimento de alguns tipos de tumor [10]. Na medicina, alguns modelos de HIV fracionários tem resultados mais próximos do que de ordem inteira [3].

Uma contextualização histórica mais ampla pode ser vista em [9].

Análise de estabilidade de um modelo é importante. Pensando nisso e com o desenvolvimento do CF, neste trabalho, trazemos na primeira seção algumas definições e resultados da teoria de estabilidade. Na segunda seção tratamos de pontos de equilíbrio e estabilidade dos modelos de Gompertz e von Bertalanffy. E finalmente a conclusão.

[1]tavoni@ibb.unesp.br
[2]pmancera@ibb.unesp.br
[3]rubens@fc.unesp.br

2 Conceitos Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados do cálculo de ordem fracionária: operador integral, definição da derivada de Caputo, propriedades e lemas baseados nas referências [7, 9].

Definição 2.1. *Função Gel'fand-Shilov. A função Gel'fand-Shilov é definida, para $\nu \notin \mathbb{Z}_-$, como [9]*

$$\phi_\nu(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & se\ t \geq 0 \\ 0 & se\ t < 0 \end{cases} . \quad (1)$$

Definição 2.2. *Integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville. Seja $f(t)$ uma função integrável, utilizamos a generalização do conceito de fatorial pela função gama, para definir a integral de ordem $\nu \in \mathbb{R}$ de $f(t)$, denotada por $I^\nu f(t)$, como*

$$I^\nu f(t) = \phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau)\, d\tau. \quad (2)$$

Propriedade 2.1. *Lei dos expoentes: $I^\gamma I^\beta f(x) = I^{\gamma+\beta} f(x)$, com $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^+$.*

Lema 2.1. *Seja $\beta \in (0,1)$ se $f \in C[0,T]$, então $I^\beta f(t)\,|_{t=0} = 0$ (ver referência [5]).*

Definição 2.3. *Derivada Fracionária de Caputo. Sejam $f(t)$ uma função diferenciável, $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) > 0$ tais que $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$. A derivada de ordem α no sentido de Caputo é definida como sendo a integral fracionária de uma derivada de ordem inteira, de forma que a lei dos expoentes faça sentido, isto é*

$$D^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t) = \phi_{m-\alpha} * D^m f(t). \quad (3)$$

.

Propriedade 2.2. *Como I^0 é o operador identidade, para $\alpha \in \mathbb{N}$ recuperamos a derivada usual.*

Observação 2.1. *Adoção da Derivada de Caputo. Na formulação de Riemann-Liouville a derivada de uma constante é diferente de zero. E, para evitar os incovenientes da derivada não nula de uma constante e de condições fisicamente não interpretáveis, Caputo, propôs uma nova definição para a derivada de ordem fracionária, baseada na definição de Riemann-Liouville, com uma inversão na ordem das operações de integração e derivação; isto é, a derivada fracionária é a integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira. Com essa nova definição a derivada de uma constante é zero e pode ser interpretada como taxa de variação (ver referência [9]).*

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0317

2.1 Equilíbrio e Estabilidade

Seja $\alpha \in (0,1]$ e consideremos o PVI

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \qquad t > 0 \quad \text{e} \quad x(0) = x_0. \tag{4}$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio (x_{eq}) de (4) fazemos $D^\alpha x(t) = 0$, e então, $f(x_{eq}) = 0$. Para avaliar a estabilidade assintótica, tomamos $x(t) = x_{eq} + \epsilon(t)$ o que implica

$$D^\alpha \epsilon(t) = f(x_{eq} + \epsilon).$$

Por Série de Taylor temos:

$$f(x_{eq} + \epsilon) = f(x_{eq}) + f'(x)\epsilon + ... \Rightarrow f(x_{eq} + \epsilon) \simeq f'(x_{eq}).\epsilon,$$

em que $f(x_{eq}) = 0$. Logo,

$$D^\alpha \epsilon(t) = f'(x_{eq}).\epsilon(t), \qquad t > 0 \quad \text{e} \quad \epsilon(0) = x_0 - x_{eq}. \tag{5}$$

Se $\epsilon(t)$ é crescente, então o ponto de equilíbrio (x_{eq}) é instável e se $\epsilon(t)$ é decrescente, então o ponto de equilíbrio (x_{eq}) é localmente assintoticamente estável.

Maiores detalhes podem ser encontrados em [1, 2, 6–8].

3 Análise de Estabilidade de Dois Modelos de Ordem Fracionária

Agora analisamos a estabilidade para os modelos de von Bertalanffy e Gompertz de ordem fracionária.

3.1 Modelo de von Bertalanffy

Sejam $\alpha \in (0,1]$ e $m, n > 0$, o problema de valor inicial de ordem fracionária do modelo de von Bertalanffy é dado por:

$$D^\alpha x(t) = m(x(t))^{\frac{2}{3}} - nx(t), \qquad t > 0 \quad \text{e} \quad x(0) = x_0. \tag{6}$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio façamos $D^\alpha x(t) = 0$, e, então os pontos de equilíbrio são $x_{eq} = 0, \left(\frac{m}{n}\right)^3$.

Temos que $f'(x(t)) = \dfrac{2}{3}mx^{-\frac{1}{3}} - n$ e $f'(0) = p$, $p \to +\infty$, $f'\left(\left(\dfrac{m}{3}\right)^3\right) = -\dfrac{1}{3}n < 0$.

Por (5), para $x_{eq} = 0$, temos

$$D^\alpha \epsilon(t) = f'(x_{eq} = 0)\epsilon(t) = p\epsilon(t), \qquad t > 0 \quad \text{e} \quad \epsilon(0) = x_0, \tag{7}$$

$\epsilon(t)$ é dado por (ver referências [4, 7]):

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0317

$$\epsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^i t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} x_0. \tag{8}$$

Portanto, o ponto de equilíbrio $x_{eq} = 0$ é instável.

Por (5), para $x_{eq} = \left(\frac{m}{n}\right)^3$, temos

$$D^\alpha \epsilon(t) = f'(x_{eq})\epsilon(t) = -\frac{1}{3}n\epsilon(t), \qquad t > 0 \quad \text{e} \quad \epsilon(0) = x_0 - \left(\frac{m}{n}\right)^3, \tag{9}$$

$\epsilon(t)$ é dado por (com $x_0 > \left(\frac{m}{n}\right)^3$) (ver referências [4, 7]):

$$\epsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{3}n\right)^i t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \left(x_0 - \left(\frac{m}{n}\right)^3\right).$$

Então, o ponto de equilíbrio $x_{eq} = \left(\frac{m}{n}\right)^3$ é assintoticamente estável.

3.2 Modelo de Gompertz

Sejam $\alpha \in (0, 1]$ e $r, K > 0$, o problema de valor inicial de ordem fracionária do modelo de Gompertz é dado por:

$$D^\alpha x(t) = rx(t) \ln\left(\frac{K}{x(t)}\right), \qquad t > 0 \quad \text{e} \quad x(0) = x_0. \tag{10}$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio façamos $D^\alpha x(t) = 0$, e, então, os pontos de equilíbrio são $x_{eq} = 0, K$.

Temos que $f'(x(t)) = r \ln\left(\frac{K}{x(t)}\right) - r$ e $f'(0) = p$, $p \to +\infty$, $f'(K) = -r < 0$.

Por (5), para $x_{eq} = 0$, temos que

$$D^\alpha \epsilon(t) = f'(x_{eq})\epsilon(t) = p\epsilon(t), \qquad t > 0 \quad \text{e} \quad \epsilon(0) = x_0, \tag{11}$$

$\epsilon(t)$ como definimos anteriormente na equação (8).

Portanto, o ponto de equilíbrio $x_{eq} = 0$ é instável.

Por (5), para $x_{eq} = K$, temos

$$D^\alpha \epsilon(t) = f'(x_{eq})\epsilon(t) = -r\epsilon(t), \qquad t > 0 \quad \text{e} \quad \epsilon(0) = x_0 - K, \tag{12}$$

$\epsilon(t)$ é dado por (com $x_0 > K$) (ver referências [4, 7]):

$$\epsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-r)^i t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (x_0 - K).$$

Então o ponto de equilíbrio $x_{eq} = K$ é assintoticamente estável.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0317

4 Conclusões

Os reultados da análise de estabilidade obtidos nos modelos fracionários de Gompertz e von Bertalanffy são os mesmos obtidos nos modelos clássicos. Como continuidade, um dos próximos trabalhos é analisar a estabilidade de um sistema não-linear em que os resultados do modelo de ordem arbitrária é diferente do modelo de ordem inteira, como exemplo o modelo presa-predador (ver referência [2]).

Referências

[1] E. Ahmed, A. M. A. El-Sayed, H. A. A. El-Saka. On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rossler, Chua and Chen systems. *Physical Letters*, 2006.

[2] E. Ahmed, A. M. A. El-Sayed, H. A. A. El-Saka. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models. *J. Math. Anal. Appl.*, pages 542-553, 2007.

[3] A. A. M. Arafa, I. M. Hanafy, M. I. Gouda. Stability analysis of fractional order HIV infection of ^{+}T cells with numerical solutions. *J. Math. Phys.* 7(1), 2016.

[4] A. M. A. El-Sayed. Fractional differential-difference equations. *J. Fract. Calc.*, pages 101-106, 1996.

[5] A. M. A. El-Sayed, F. M. Gaafar, H. H. Hashem. On the maximal and minimal solutions of arbitrary orders nonlinear functional integral and differencial equations. *Math. Sci. Res. J.*, pages 336-348, 2004.

[6] A. M. A. El-Sayed, E. M. El-Mesiry, H. A. A. El-Saka. Numerical solution for multi-term fractional(arbitraty) orders differential equations. *Computacional Appl. Math*, pages 33-54, 2004.

[7] A. M. A. El-Sayed, A. E. M. El-Mesiry, H. A. A. El-Saka. On the fractional-order logistic equation. *Applied Mathematics Letters*, pages 817-823, 2007.

[8] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *Computational Engineering in System Application*, vol 2, France, 1996.

[9] R. F. Camargo, E. C. Oliveira. *Cálculo Fracionário*. Livraria da Física, São Paulo, 2015.

[10] N. Varalta, A. V. Gomes, R. F. Camargo. A prelude to the fractional calculus applied to tumor dynamic. *Tema*, 15 (2), 211-221, 2014.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0317