Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Estimativa de Fluxo de Calor Bidimensional com Variação Temporal Empregando o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov

Gabriel Teixeira Soares das Neves[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, IFF, Quissamã, RJ
Instituto Politécnico, UERJ, Nova Friburgo, RJ
Luiz Alberto da Silva Abreu[2]
Diego Campos Knupp[3]
Antônio José da Silva Neto[4]
Instituto Politécnico, UERJ, Nova Friburgo, RJ

Resumo. Neste trabalho é abordado o problema inverso de estimativa de fluxo de calor bidimensional e com variação temporal aplicado a uma placa de alumínio. A formulação *Classical Lumped* foi empregada através da espessura da placa de modo a melhorar o custo computacional sem perda de qualidade da solução numérica do problema direto, calculada através do método de diferenças finitas. Uma abordagem Bayesiana, utilizando o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov, foi utilizada para a obtenção da solução do problema inverso. Para regularização do problema foi proposta uma priori na forma de Variação Total dos Parâmetros. A abordagem foi analisada utilizando medições simuladas e se mostrou robusta para casos com baixo ruído.

Palavras-chave. Problema Inverso, Estimação de Fluxo de Calor, Inferência Bayesiana, Variação Total dos Parâmetros

1 Introdução

Em um problema de transferência de calor nem sempre são conhecidos possíveis fluxos de calor no contorno e suas estimações a partir de medições indiretas configuram-se como um problema inverso [8]. Problemas desse tipo vêm se mostrando relevantes para aplicações em diversas áreas de interesse, como o superaquecimento de *microchips* em eletrônica [2], detecção de perda de calor na produção de energia [3] e a detecção de tumores na Medicina [5], para citar alguns. Técnicas como o método do gradiente conjugado já foram empregadas para a tarefa de estimar simultaneamente a variação espacial e temporal de fluxos de calor há algum tempo, como em [9] e [10].

[1]gabriel.neves@iff.edu.br
[2]luiz.abreu@iprj.uerj.br
[3]diegoknupp@iprj.uerj.br
[4]ajsneto@iprj.uerj.br

Recentemente, com a popularização de métodos estocásticos, abordagens Bayesianas, como o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC) [6], na engenharia, problemas mais complexos e desafiadores puderam ser abordados. O avanço da tecnologia e a constante demanda por peças eletrônicas cada vez menores e, consequentemente, soluções em dissipação de calor, justifica a relevância de soluções na identificação e dissipação de fluxos pontuais de calor [4]. Embora o caso abordado em [8] seja similar ao apresentado aqui, este trabalho utiliza o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov para estimar o fluxo de calor aplicado a uma placa considerando duas dimensões espaciais e uma temporal, o que representa um significativo aumento nos parâmetros a serem estimados, com propostas de prioris na forma de *total variation density* para regularização do problema.

2 Problema Direto

Considere o problema de transferência de calor através de uma placa retangular plana, de dimensões $L_x \times L_y \times L_z$ sujeita à condição inicial $T(x, y, z, 0) = T_\infty$. Um fluxo de calor $q(x, y, t)$ é aplicado na superfície inferior ($z = 0$), enquanto a superfície superior ($z = L_z$) é submetida a convecção natural com um fluido na temperatura ambiente (T_∞), como apresentado na figura 1. Essa situação é modelada através da equação de condução do calor e condições iniciais e de contorno dadas por [1].

$$\rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{1}$$

e

$$k\frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{n}} = q(x, y, t),\ z = 0; \tag{2a}$$

$$k\frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{n}} = h(T_\infty - T(\mathbf{X}, t)),\ z = L_z \tag{2b}$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0,\ x = 0,\ x = L_x,\ y = 0,\ y = L_y; \tag{2c}$$

$$T(X, 0) = T_\infty \tag{2d}$$

com

$$0 \le x \le L_x,\ 0 \le y \le L_y,\ 0 \le z \le L_z,\ t \ge 0,$$

e onde $\mathbf{X} = (x, y, z)$, ρ é a massa específica (kg/m^3), c_p é o calor específico do material($J/(kg\cdot K)$), e k a condutividade térmica ($W/(m \cdot K)$).

Se o número de Biot, como definido em [1], calculado na direção z for suficientemente pequeno, pode-se aplicar a técnica *Classical Lumped* através de L_z, que considera a temperatura constante e igual à média das temperaturas nesta direção. Além disso, utilizadas as condições de contorno 2a e 2b, é possível reescrever a equação 1 com as respectivas condições de contorno e inicial, como apresentado a seguir.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \frac{q}{L_z} + \frac{h}{L_z}(T - T_\infty) \tag{3}$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0356

$$\frac{\partial T(\mathbf{X},t)}{\partial \mathbf{n}} = 0,\ x = 0,\ x = L_x,\ y = 0,\ y = L_y; \tag{4a}$$

$$T(\mathbf{X},0) = T_\infty \tag{4b}$$

com $0 \leq x \leq L_x,\ 0 \leq y \leq L_y,\ 0 \leq z \leq L_z,\ t \geq 0$ e, dessa vez, $\mathbf{X} = (x,y)$.

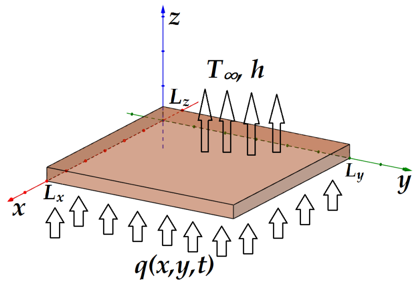


Figura 1: Representação do problema físico.

Para a solução do problema direto é utilizado um esquema de diferenças finitas sobre uma malha com N_x pontos na direção x, N_y pontos na direção y e N_t passos temporais. A convergência da solução do método foi verificada com a solução gerada por rotina intrínseca do MatLab®.

3 Problema Inverso

Para a formulação do problema inverso são considerados dados experimentais simulados adicionando ruído à solução convergida do problema direto sobre uma malha $N_x \times N_y \times N_t$, fornecendo um total de $D = N_x \times N_y \times N_t$ valores experimentais. O vetor de dados experimentais pode ser expresso como

$$\mathbf{Y}^T = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_D) \tag{5}$$

onde Y_i, $i = 1, 2 \ldots, D$, corresponde à medição em cada posição da malha.

O fluxo de calor $q(x,y,t)$ é estimado sobre uma malha com $DP = NP_x \times NP_y \times NP_t$ nós, levando a DP parâmetros a serem estimados, $q^k_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, NP_x$, $j = 1, 2, ...NP_y$ e $k = 1, 2, \ldots, NP_t$, correspondentes a $q(x_i, y_j, t_k)$. Então, o vetor de estimativas para os parâmetros procurados pode ser escrito como

$$\mathbf{P}^T = (q_1, q_2, \ldots, q_{DP}) \tag{6}$$

Para a solução do problema inverso é utilizada uma abordagem Bayesiana, pois possibilita combinar informações *a priori* no cálculo das estimativas através do teorema de Bayes [6], característica importante para regularização de problemas em que muitos parâmetros são estimados. Nesse caso, a solução do problema consiste numa curva de densidade com a probabilidade *a posteriori*, expressa por

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0356

$$\pi_{post}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi_{prior}(\mathbf{P})\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{Y})} \tag{7}$$

onde $\pi_{post}(\mathbf{P})$ é a distribuição posterior de probabilidade dos parâmetros $\mathbf{P}$, $\pi_{prior}(\mathbf{P})$ é a distribuição de probabilidades dos dados *a priori*, $\pi(\mathbf{Y})$ a distribuição marginal de probabilidade dos dados experimentais, que desempenha papel de constante de normalização e $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$, a função de verossimilhança, expressa analiticamente na forma

$$\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) = (2\pi)^{-D/2}|W|^{-1/2} \times \exp\left[-\frac{1}{2}[\mathbf{Y}-T(\mathbf{P})]^t W^{-1}[\mathbf{Y}-T(\mathbf{P})]\right] \tag{8}$$

onde D é a quantidade de medidas, W é a matriz de covarianças dos erros das medidas e $T(\mathbf{P})$ é o vetor contendo a solução do problema direto dados os valores de $\mathbf{P}$, nas mesmas posições que as medidas experimentais.

É utilizado o algoritmo Metropolis-Hasting, descrito detalhadamente em [6], para gerar candidatos para a distribuição *a posteriori*. A implementação se inicia com a seleção de uma densidade de movimentação $p(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})$, que é utilizada para gerar um candidato $(\mathbf{P}^*)$ para o novo estado da cadeia, dado o estado anterior $\mathbf{P}^{(t-1)}$. Criando assim a sequência $\{\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \ldots, \mathbf{P}^n\}$, que deve convergir para a solução procurada. Note que os primeiros termos, ainda não convergidos, devem ser ignorados.

Para modelar a priori, é empregada a abordagem *total variation density* [7], dada na forma

$$\pi(\mathbf{P}) \propto \exp\left[-\frac{\gamma}{2}TV(\mathbf{P})\right] \tag{9}$$

com o parâmetro de regularização (γ) escolhido empiricamente para o problema e onde, para o caso estudado,

$$\begin{aligned} TV(\mathbf{P}) \;=\; & \sum_{i=2}^{NP_x-1}\sum_{j=2}^{NP_y-1}\sum_{k=2}^{NP_t-1} \Delta x \left[\left|q_{i,j}^k - q_{i+1,j}^k\right| + \left|q_{i,j}^k - q_{i-1,j}^k\right| \right] + \\ & + \; \Delta y \left[\left|q_{i,j}^k - q_{i,j+1}^k\right| + \left|q_{i,j}^k - q_{i,j-1}^k\right| \right] + \Delta t \left[\left|q_{i,j}^k - q_{i,j}^{k+1}\right| + \left|q_{i,j}^k - q_{i,j}^{k-1}\right| \right] \end{aligned} \tag{10}$$

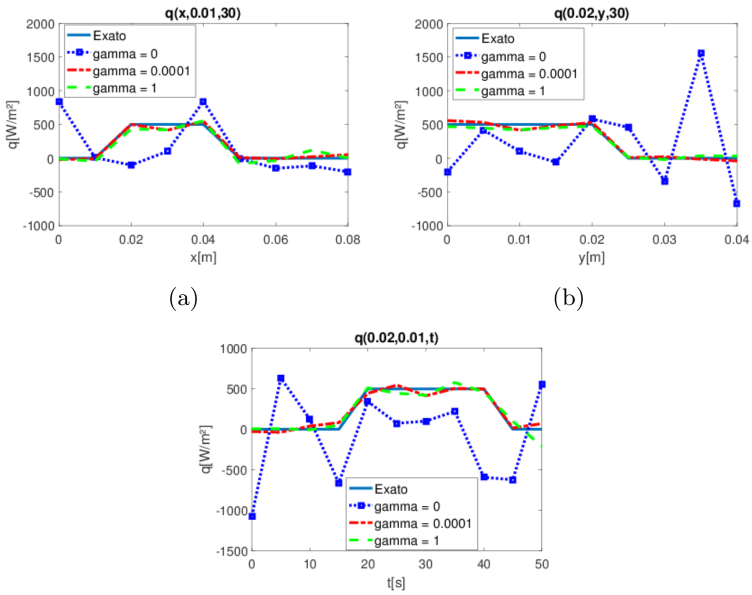
4 Resultados e Discussões

Foi considerado o caso de uma placa retângular com dimensões $0,08m \times 0,04m$ e $0,003m$ de espessura, e duração de 50 segundos do fenômeno de condução de calor. As propriedades do material simulado são próximas dos utilizados na manufatura de *chips* eletrônicos, com $k = 0,2\ W/mK$ e $\rho c_p = 9,6 \times 10^5 J/m^3K$. O coeficiente de transferência de calor escolhido foi de $h = 12\ W/m^2K$, com $T_\infty = 20^oC$. O fluxo, em W/m^2, que pretende-se estimar é o descrito pela equação 11, que consiste em uma função com variações abruptas no tempo e espaço.

$$q(x,y,t) = \begin{cases} 500 & 0,02 \leq x \leq 0,04, 0 \leq y \leq 0,02, 20 \leq t \leq 40 \\ 0 & 0,02 \geq x \geq 0,04 \text{ ou } 0 \geq y \geq 0,02 \text{ ou } 20 \geq t \geq 40 \end{cases} \tag{11}$$

A malha utilizada para estimação do fluxo possui $9 \times 9 \times 11$ nós, o que leva a 891 parâmetros a serem estimados, q_{ij}^k, com $i, j = 1, 2, \ldots, 9$ e $k = 1, 2, \ldots, 11$ e os dados experimentais foram simulados adicionando um ruído com distribuição Gaussiana, média zero e desvio padrão $\sigma = 0.05^o C$ à solução convergida do problema direto calculada via diferenças finitas. As propostas para as estimativas do fluxo de calor a serem utilizadas no MCMC são distribuições normais com desvio padrão $\delta = 5W/m^2$. Foram calculados 50000 estados na cadeia de Markov, sendo os 10000 primeiros descartados [6].

Devido ao elevado número de parâmetros a serem determinados, faz-se necessário o uso de técnicas de regularização para o problema, na forma de informação *a priori*. Os resultados aqui apresentados comparam os casos em que $\gamma = 0$ (sem priori), $\gamma = 0,0001$ e $\gamma = 1$. A figura 2 apresenta o fluxo estimado em cada caso em comparação com o valor exato na direção x, com $y = 0,01m$ e $t = 30s$ (figura 2(a)), na direção y, com $x = 0,02m$ e $t = 30s$ (figura 2(b)), e a evolução no tempo, com $x = 0,02s$ e $y = 0,01s$ (figura 2(c)). Os resultados para o caso sem priori apresentam comportamento bastante irregular, enquanto os casos em que utiliza a priori do tipo *total variation* aproximam com boa concordância o fluxo exato, o que demonstra o bom desempenho na obtenção de estimativas para fluxos de calor que apresentem variações bruscas no tempo e espaço.



(a) (b) (c)

Figura 2: Comparativo entre fluxo estimado e exato nas direções x (a), y (b) e no tempo (c).

Para a análise do erro na estimativa do fluxo de calor é utilizado o erro RMS, como definido a seguir para a aproximação de um conjunto de parâmetros $\epsilon_{i,j}^k$ calculados em relação a valores exatos $\epsilon(x_i, y_j, t_k)$ numa malha $N_x \times N_y \times N_t$, e que será aplicado para o fluxo e para a temperatura calculada com o modelo após a solução do problema inverso. Os resultados são apresentados na tabela 1.

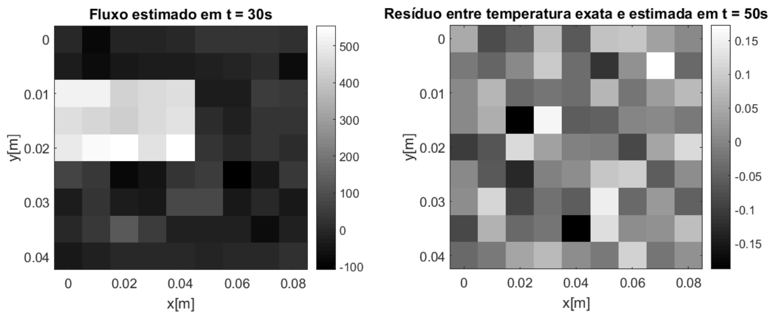
DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0356

$$RMS_\epsilon = \sqrt{\frac{1}{N_x}\frac{1}{N_y}\frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_t}[\epsilon(x_i, y_j, t_k) - \epsilon_{i,j}^k]^2} \tag{12}$$

Tabela 1: Erros calculados para diferentes valores de γ.

Erro	$\gamma = 0$	$\gamma = 0,0001$	$\gamma = 1$
RMS_q	9,9769	2,8646	0,0255
RMS_T	0,0065	0,0011	0,00061513

Observando os valores dos erros RMS para cada caso fica bastante claro como a modelagem das prioris na forma de *total variation* cumpre o papel de regularizar o problema de forma satisfatória. Mesmo com pouca influência, com $\gamma = 0,0001$, já é possível notar uma diminuição significativa no erro calculado. Quando se considera $\gamma = 1$ os erros calculados diminuem de forma expressiva. A figura 3 apresenta a reconstrução do fluxo encontrado para o tempo $t = 30s$ (figura 3(a)) e o resíduo entre a temperatura exata e a estimada em $t = 50s$ (figura 3(b)), com $\gamma = 1$ em ambos os casos. O baixo valor do resíduo confirma a a qualidade das estimativas obtidas com a metodologia desenvolvida.



(a) (b)

Figura 3: (a) Fluxo estimado (W/m^2) e (b) resíduo entre temperaturas estimadas e medidas (C^o) para $\gamma = 1$.

5 Conclusões

Este trabalho tratou do problema inverso de estimativa do fluxo de calor em meios bidimensionais com variação temporal, utilizando o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov e a priori *total variation*. Os resultados da estimativa para o fluxo e para o perfil de temperaturas apresentam boa concordância com o fluxo de calor imposto, determinado com o problema direto, e os dados experimentais para a temperatura utilizados no problema inverso, respectivamente.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0356

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro da FAPERJ, do CNPq e da CAPES. O primeiro autor agradece o suporte financeiro do IFF, instituição na qual é professor.

Referências

[1] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P Incropera e D. P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, USA, 2011.

[2] W. L. Chen e Y. C. Yang. Estimation of the Transient Heat Transfer Rate at the Boundary of an Electronic Chip Packaging, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, volume 54, 10:945–961, 2008. DOI: 10.1080/10407780802473574.

[3] S. Govert. Heat Loss Prediction of a Confined Premixed Jet Flame Using a Conjugate Heat Transfer Approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.122.

[4] G. Hetsroni, A. Mosyak e Z. Segal. Nonuniform Temperature Distribution in Electronic Devices Cooled by Flow in Parallel Microchannels, *IEEE Transcations on Components and Packaging Technologies*, volume 24, 16–23, 2001. DOI: 10.1109/6144.910797.

[5] A. Jafarimoghaddam e S. Aberoumand. A Bayesian Approach and Total Variation Priors in 3D Electrical Impedance Tomography, *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 2016. DOI: 10.1109/IEMBS.1998.745625.

[6] J. Kaipio e E. Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer, USA, 2004.

[7] M. F. Mescolin, L. A. da S. Abreu, D. C. Knupp e A. J. Silva Neto, Estimation of Spatially and Time Varying Heat Flux via Markov chain Monte Carlo Method and Integral Transforms, *Procedings of ENCIT*, 2016.

[8] H. R. B. Orlande. Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications, *Journal of Heat Transfer*, volume 134, 2012. DOI: 10.1115/1.4005131.

[9] A. J. Silva Neto e M. N. Özisik, Simultaneous Estimation of Location and Timewise-Varying Strength of a Plane Heat Source, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, volume 24, 4:467–477, 1993. DOI: 10.1080/10407789308902635.

[10] J. Su e A. J. Silva Neto, Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem of Source Strength Estimation in Cylindrical Rods, *Applied Mathematical Modelling*, volume 25, 10:861–872, 2001. DOI: 10.1016/S0307-904X(01)00018-X.

