

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Estudo de Estabilidade para uma Formulação Híbrida Primal Estabilizada Aplicada ao Problema de Calor

Daiana Soares Barreiro¹José Karam-Filho²

Coordenação de Mecânica Computacional, LNCC, Petrópolis, RJ

Cristiane Oliveira de Faria³

Departamento de Análise Matemática, IME, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Neste trabalho será realizado um estudo de estabilidade da solução totalmente discretizada do problema de condução de calor em regime transiente analisando a influência do parâmetro de estabilização e do Δt . O problema de condução de calor é caracterizado por equações parabólicas e a variável espacial será discretizada usando um método de elementos finitos híbrido estabilizado combinado com aproximações de diferenças finitas, método de Euler implícito, para variável temporal. O método híbrido estabilizado de elementos finitos consiste no acoplamento de problemas locais, onde a solução da variável primal é obtida, com um problema global para os multiplicadores de Lagrange, identificado como traço da temperatura, e tem a continuidade imposta de forma fraca. A metodologia de implementação utilizada para a resolução do problema é a denominada *Condensação Estática* que tem como vantagem o fato de ser mais eficiente do ponto de vista computacional. Os resultados numéricos mostrados comprovam taxas ótimas de convergência na norma $L^2(\Omega)$ e não apresentam oscilações espúrias para tempos muito pequenos.

Palavras-chave. Elementos Finitos, Métodos Híbridos, Análise de Estabilidade, Equação do Calor

1 Introdução

Problemas de condução de calor em regime transiente são comumente representados por equações diferenciais classificadas como parabólicas. As abordagens mais conhecidas são baseadas em formulações semidiscretas de elementos finitos para a aproximação espacial combinadas com esquemas de diferenças finitas para a aproximação temporal. O método de Galerkin clássico, que é usualmente definido de maneira que a aproximação espacial seja contínua entre os elementos da discretização, é bastante empregado para resolver numericamente essa classe de problemas. Contudo, quando este é o escolhido e o passo do tempo é reduzido com um tamanho de malha fixo, oscilações espaciais espúrias aparecem à medida que o tempo aumenta, poluindo a solução nos tempos iniciais [5]. Com o intuito de

¹daianasb@lncc.br

²jkf@lncc.br

³cofaria@ime.uerj.br

evitar as soluções oscilações espúrias uma formulação híbrida estabilizada para a variável espacial combinada com um esquema de Euler implícito para a variável temporal foi proposta em [4] e uma análise numérica foi realizada em [2]. Essa formulação tem como base as mesmas ideias encontradas em Arruda et al. [1], para o problema elíptico. Tal método consiste no acoplamento de problemas locais, onde a solução da variável primal é dada pelo método Galerkin Descontínuo (GD) [6], com um problema global para os multiplicadores de Lagrange, sendo a continuidade entre os elementos imposta de forma fraca. Boas características do método GD como estabilidade, robustez e flexibilidade estão presentes nas formulações híbridas estabilizadas, porém, esses métodos apresentam complexidade e custo computacional reduzidos quando comparados aos métodos GD. Além disso, esta formulação evita as oscilações espúrias que surgem nos tempos iniciais de simulação quando combinada com esquemas de Euler implícito. A metodologia de implementação adotada consiste em eliminar as variáveis de interesse, resultando em um sistema global relacionado apenas com o multiplicador de Lagrange diminuindo, assim, o número de graus de liberdade. Em seguida ao encontrar a solução aproximada do multiplicador, a variável de interesse é calculada elemento por elemento. Essa abordagem é denominada *Condensação Estática* e tem como vantagem o fato de ser mais eficiente do ponto de vista computacional, já que reduz o número de graus de liberdade do problema global e, conseqüentemente, apresenta uma redução no custo computacional [3].

2 Preliminares

Nesta seção serão apresentados o problema modelo, algumas definições e notações necessárias para a construção das formulações híbridas do problema parabólico. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio aberto, $\partial\Omega$ seu contorno, $f \in L^2(\Omega)$ um termo fonte e o tempo $t \in [0, T]$. Considerando condições de contorno de Dirichlet homogêneas, problemas de difusão de calor em regime transiente podem ser modelados pelo seguinte problema modelo parabólico linear: Determinar a temperatura $u = u(\mathbf{x}, t)$, tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\nabla u) = f \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3)$$

Seja o espaço das funções mensuráveis quadrado integráveis, $L^2(\Omega) = \left\{ v : \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\}$, com sua norma usual definida pelo produto interno e representada por $\|\cdot\|$. A partição de elementos finitos é dada por $\mathcal{T}_h = \{\mathcal{K}\} := \{ \text{união de todos os elementos } \mathcal{K} \}$. Além disso, \mathcal{E}_h é o conjunto de todas as arestas e dos elementos \mathcal{K} , \mathcal{E}_h^0 é o conjunto das arestas interiores e $\mathcal{E}_h^\partial = \mathcal{E}_h \cap \partial\Omega$ é o conjunto de arestas da fronteira de Ω . Sejam $[\cdot]$ e $\{\cdot\}$ os operadores de salto e média, definidos em [6]. Dados os elementos $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{T}_h$ que compartilham o lado e , definimos $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ como os vetores normais unitários na aresta e dos elementos $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$,

respectivamente. Assim, para uma função escalar φ :

$$[\varphi] = \varphi_1 \mathbf{n}_1 + \varphi_2 \mathbf{n}_2 \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^0 \quad \text{e} \quad [\varphi] = \varphi \mathbf{n} \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^\partial, \quad (4)$$

$$\{\varphi\} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^0 \quad \text{e} \quad \{\varphi\} = \varphi \quad \text{em } e \in \mathcal{E}_h^\partial. \quad (5)$$

Denotaremos o espaço quebrado, [6], de dimensão finita (na variável espacial) para a temperatura, da seguinte maneira:

$$V_h^k = \{v_h \in L^2(\Omega) : v_h|_{\mathcal{K}} \in S_k(\mathcal{K}) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h\}, \quad (6)$$

com $S_k(\mathcal{K}) = Q_k(\mathcal{K})$ (elementos quadrilaterais). Para o multiplicador de Lagrange, considerando funções de interpolação descontínuas, o espaço será

$$M_h^l = \{\mu_h \in L^2(\mathcal{E}_h) : \mu_h|_e = p_l(e), \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \quad \mu_h|_e = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\} \quad (7)$$

onde $p_l(e)$ é o espaço de funções polinomiais de grau igual ou maior do que l em cada aresta e .

3 Formulação Híbrida Estabilizada para o Problema Parabólico

Com base nas ideias encontradas em [1], para o problema elíptico, uma formulação híbrida estabilizada para a variável espacial combinada com um esquema de Euler implícito para a variável temporal foi proposta em [4] para o problema parabólico. Essa formulação evita as oscilações espúrias que surgem nos tempos iniciais de simulação quando, por exemplo, é usado o método de Galerkin usual para discretização espacial. Aqui, o multiplicador de Lagrange é identificado como o traço da variável primal u : $\lambda = u|_e$ em cada aresta $e \in \mathcal{E}_h$. A condição de fronteira $u = 0$ em $\partial\Omega$ é fracamente imposta usando a mesma abordagem de Nitsche usualmente adotada em métodos GD. Um termo residual é adicionado tornando a formulação simétrica e adjunta consistente. Também é adicionado um termo para estabilização da variável u e do multiplicador de Lagrange λ .

Considerando que $v_h \in V_h^k$ é definido independentemente em cada elemento $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$, a formulação totalmente discreta pode ser escrita em função do conjunto dos problemas locais definidos em cada elemento \mathcal{K} acoplado ao problema global definido em \mathcal{E}_h , como a seguir. Para todo $n = 1, \dots, N$ com $\Delta t = T/N$:

Problemas Locais: Encontrar $u_h^{n+1} \in V_h^k(\mathcal{K}) = V_h^k|_{\mathcal{K}}$, tal que $\forall v_h|_{\mathcal{K}} \in V_h^k(\mathcal{K})$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{K}} \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right) v_h \, dx + \int_{\mathcal{K}} \nabla u_h^{n+1} \cdot \nabla v_h \, dx \\ & - \int_{\partial\mathcal{K}} \nabla u_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}} v_h \, ds - \int_{\partial\mathcal{K}} \nabla v_h \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}} (u_h^{n+1} - \lambda_h^{n+1}) \, ds \\ & + \int_{\partial\mathcal{K}} \frac{\beta_0}{h} (u_h^{n+1} - \lambda_h^{n+1}) v_h \, ds = \int_{\mathcal{K}} f^{n+1} v_h \, dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Problema Global: Encontrar $\lambda_h^{n+1} \in M_h^l$, tal que $\forall \mu_h \in M_h^l$,

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial \mathcal{K}} \nabla u_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}} \mu_h \, ds - \int_{\partial \mathcal{K}} \frac{\beta_0}{h} (u_h^{n+1} - \lambda_h^{n+1}) \mu_h \, ds \right] = 0. \quad (9)$$

Essa técnica de separação dos problemas é denominada de *Condensação Estática*.

4 Solver Híbrido

Dado que u_h^{n+1} denota a variável de interesse, λ_h^{n+1} o multiplicador de Lagrange no passo de tempo $n + 1$ nos sistemas (8)-(9) e, escolhendo o parâmetro de estabilização (β_0) adequadamente, podemos sempre eliminar os graus de liberdade da variável primal u_h^{n+1} no nível do elemento em favor dos graus de liberdade que leva a um sistema global somente com o multiplicador λ_h^{n+1} em cada passo. Note que pode-se adotar qualquer ordem (l) de funções de interpolação contínuas ou descontínuas para o multiplicador λ_h^{n+1} independentemente da ordem k adotada para a variável primal u_h^{n+1} . Aqui serão apenas consideradas interpolações descontínuas para o multiplicador de Lagrange.

4.1 Metodologia de Implementação

Para apresentar a metodologia da implementação reescreveremos o problema local (8) pelas formas bilineares, $a_{\mathcal{K}}(\cdot, \cdot)$ e $b_{\mathcal{K}}(\cdot, \cdot)$, e pelo funcional linear, $f_{\mathcal{K}}(\cdot)$, definidas como

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{K}}(u_h^{n+1}, v_h) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{K}} u_h^{n+1} v_h \, dx + \int_{\mathcal{K}} \nabla u_h^{n+1} \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{\partial \mathcal{K}} \nabla u_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}} v_h \, ds \\ &\quad - \int_{\partial \mathcal{K}} \nabla v_h \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}} u_h^{n+1} \, ds + \int_{\partial \mathcal{K}} \frac{\beta_0}{h} u_h^{n+1} v_h \, ds, \end{aligned} \quad (10)$$

$$b_{\mathcal{K}}(\lambda_h^{n+1}, v_h) = \int_{\partial \mathcal{K}} \nabla v_h \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}} \lambda_h^{n+1} \, ds - \int_{\partial \mathcal{K}} \frac{\beta_0}{h} \lambda_h^{n+1} v_h \, ds, \quad (11)$$

$$f_{\mathcal{K}}(u_h^n, v_h) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{K}} u_h^n v_h \, dx + \int_{\mathcal{K}} f^{n+1} v_h \, dx. \quad (12)$$

Então, o problema local torna-se

$$a_{\mathcal{K}}(u_h^{n+1}, v_h) + b_{\mathcal{K}}(\lambda_h^{n+1}, v_h) = f_{\mathcal{K}}(u_h^n, v_h). \quad (13)$$

Reescreveremos também o problema global (9) pelas formas bilineares $c_{\mathcal{K}}(\cdot, \cdot)$ e $b_{\mathcal{K}}^T(\cdot, \cdot)$:

$$b_{\mathcal{K}}^T(u_h^{n+1}, \mu_h) = \int_{\partial \mathcal{K}} \nabla u_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}} \mu_h \, ds - \int_{\partial \mathcal{K}} \frac{\beta_0}{h} u_h^{n+1} \mu_h \, ds, \quad (14)$$

$$c_{\mathcal{K}}(\lambda_h^{n+1}, \mu_h) = \int_{\partial \mathcal{K}} \frac{\beta_0}{h} \lambda_h^{n+1} \mu_h \, ds. \quad (15)$$

Logo, o problema global é dado por

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} [b_{\mathcal{K}}^T(u_h^{n+1}, \mu_h) + c_{\mathcal{K}}(\lambda_h^{n+1}, \mu_h)] = 0. \quad (16)$$

Assim, podemos escrever as equações (13) e (16) na forma matricial, chegando em

$$\mathbf{A}_{\mathcal{K}} \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{B}_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\Lambda}^{n+1} = \mathbf{F}_{\mathcal{K}} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h, \quad (17)$$

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_{\mathcal{K}}^T \mathbf{U}^{n+1} + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \mathbf{C}_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\Lambda}^{n+1} = 0. \quad (18)$$

Dado que $\mathbf{A}_{\mathcal{K}}$ é inversível, de (17), temos

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{A}_{\mathcal{K}}^{-1} (\mathbf{F}_{\mathcal{K}} - \mathbf{B}_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\Lambda}^{n+1}). \quad (19)$$

Substituindo (19) em (18), obtemos o sistema global em função apenas do multiplicador:

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{C}_{\mathcal{K}} - \mathbf{B}_{\mathcal{K}}^T \mathbf{A}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{B}_{\mathcal{K}}) \boldsymbol{\Lambda}^{n+1} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} -\mathbf{B}_{\mathcal{K}}^T \mathbf{A}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{F}_{\mathcal{K}}. \quad (20)$$

5 Resultados Numéricos

Os experimentos numéricos foram realizados em malhas quadrilaterais uniformes definidas num domínio bidimensional $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Também foi considerada a condição de contorno de Dirichlet homogênea, condição inicial, $u_0 = 0$, um termo fonte, $f(x, y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$, e a solução exata para o problema em questão é $u(x, y, t) = \left[\frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2} e^{-2\pi^2 t} \right] \text{sen}(\pi x) \text{cos}(\pi y)$. Associaremos a elementos quadrilaterais o espaço de funções polinomiais de grau k , $Q_k(\mathcal{K})$, e o espaço de funções polinomiais de grau l , $p_l(e)$, em cada aresta e .

Assim, foi aqui realizado um estudo de influência de β_0 e Δt em termos de precisão do erro e convergência-h na norma $L^2(\Omega)$, usando o mesmo grau de interpolação para o multiplicador λ_h e para a temperatura u_h na norma e considerando os elementos do tipo $Q_1 - p_1$, linear, $Q_2 - p_2$, quadrático e $Q_3 - p_3$, cúbico.

Os resultados estão apresentados nas Figuras 1–3. Nota-se que, em todos os casos, tanto para u_h quanto para λ_h são atingidas as taxas de convergência esperadas com o decréscimo de Δt , sendo suficientes os valores de $\Delta t = 10^{-6}$ para o caso $Q_1 - p_1$ e $\Delta t = 10^{-8}$ para os casos $Q_2 - p_2$ e $Q_3 - p_3$. Isso mostra-se mais evidente para o multiplicador, através das Figuras 1 (a)-(b), 2 (a)-(b) e 3 (a)-(b) do que para u_h (Figuras 1 (c)-(d), 2 (c)-(d) e 3 (c)-(d)). As taxas esperadas são alcançadas para uma larga faixa de valores do parâmetro estabilizador β_0 . Considerando esses Δt 's ótimos, a precisão não se altera para u_h em relação a β_0 em nenhum dos casos de interpolação (Figuras 1 (c)-(d), 2 (c)-(d) e 3 (c)-(d)). Para o multiplicador, o caso $Q_2 - p_2$ mostra-se muito pouco sensível a β_0 , mesmo quando este é muito pequeno (Figura 2 (b)). As interpolações $Q_1 - p_1$ e $Q_3 - p_3$ (Figuras 1 (b) e 3 (b)), embora mais sensíveis quando β_0 é muito pequeno, boa precisão é obtida para valores de $\beta_0 \geq 5$ no caso $Q_1 - p_1$ e de $\beta_0 \geq 16$ no caso $Q_3 - p_3$, com valores ótimos de $\beta_0 = 7$ e $\beta_0 \geq 24$, respectivamente, como pode ser visto nas Figuras 1 (b) e 3 (b).

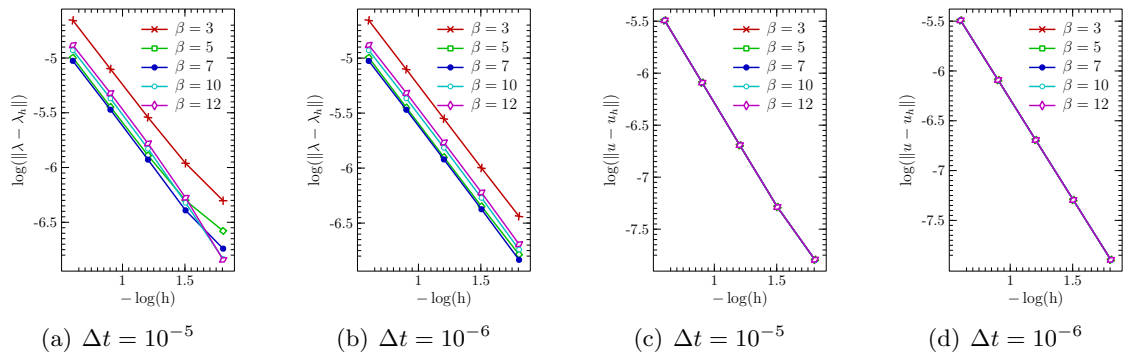


Figura 1: Influência de β_0 e Δt sobre λ_h (a)-(b) e u_h (c)-(d), para $Q_1 - p_1$.

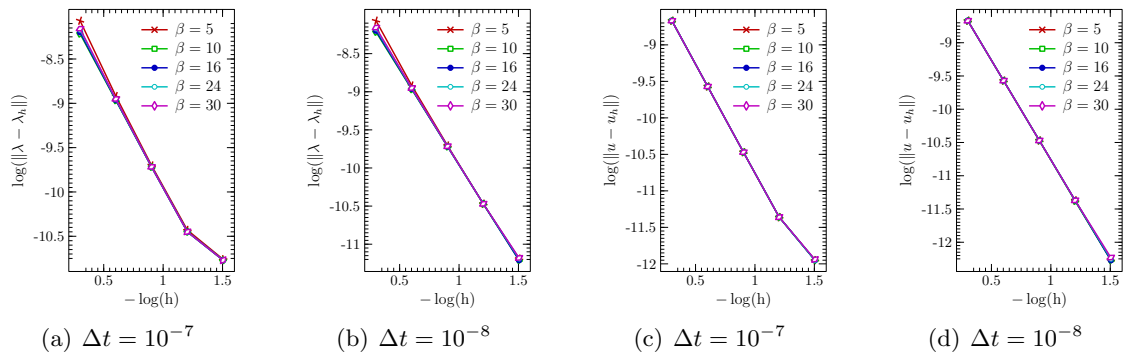


Figura 2: Influência de β_0 e Δt sobre λ_h (a)-(b) e u_h (c)-(d), para $Q_2 - p_2$.

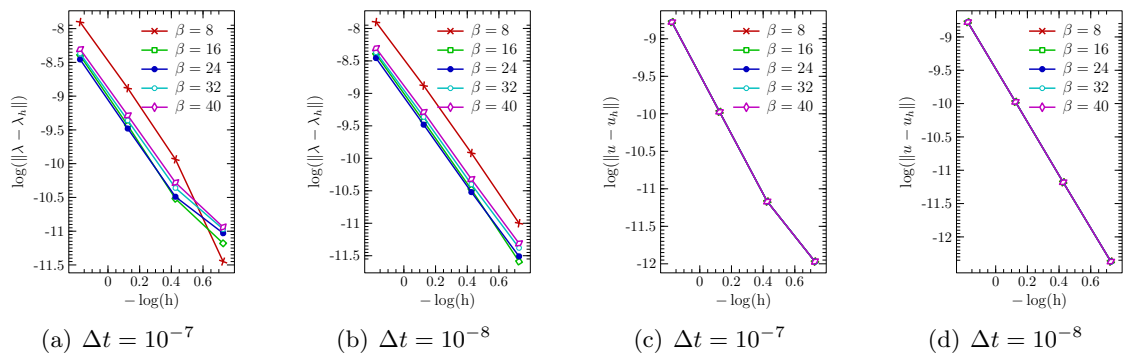


Figura 3: Influência de β_0 e Δt sobre λ_h (a)-(b) e u_h (c)-(d), para $Q_3 - p_3$.

6 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um método para obter a solução numérica do problema de condução de calor a partir da discretização da variável espacial por uma formulação híbrida estabilizada combinada com o método de Euler Implícito para a aproximação da variável temporal. A metodologia de implementação computacional é baseada na técnica de condensação estática que tem como vantagem a diminuição no custo computacional, já que proporciona uma redução no número de graus de liberdade. Resultados numéricos apresentam taxas ótimas de convergência de $\mathcal{O}(h^{k+1})$ para u_h , $\mathcal{O}(h^{k+0.5})$ para λ_h e $\mathcal{O}(\Delta t)$ no tempo, comprovando a análise numérica desenvolvida em [2] e evidenciando o papel do termo estabilizador (β_0) na obtenção de soluções livres de oscilações espúrias, pois nos testes realizados foram considerados Δt extremamente pequenos.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES e à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] N. C. B. Arruda, A. F. D. Loula e R. C. Almeida. Locally discontinuous but globally continuous Galerkin methods for elliptic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 255:104-120, 2013. DOI:10.1016/j.cma.2012.11.013.
- [2] D. S. Barreiro, Análise Numérica de uma Formulação Primal Híbrida Estabilizada Aplicada ao Problema de Condução de Calor, Dissertação de Mestrado, LNCC, 2017.
- [3] F. Brezzi, D. Boffi, L. F. Demkowicz, R. S. Falk, R. G. Durán and M. Fortin. *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications*. Springer, 2006.
- [4] K. P. Fernandes, A. F. D. Loula e S. M. C. Malta. Uma formulação hibridizada de elementos finitos para problemas parabólicos, *TEMA*, 14:333-346, 2013. DOI: 10.5540/tema.2013.014.03.0333.
- [5] I. Harari. Stability of Semidiscrete Formulations for Parabolic Problems at Small Time Steps, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:1491-1516, 2004. DOI:10.1016/j.cma.2003.12.035.
- [6] B. Rivière. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation*. SIAM Publication, New York, 2008.