

## Aprimoramento de um preconditionador híbrido aplicado ao método de pontos interiores

Aurelio Ribeiro Leite Oliveira<sup>1</sup>

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP

Cecilia Orellana Castro<sup>2</sup>

Instituto de Engenharia do Araguaia, UNIFESSPA, Santana do Araguaia, PA

Manolo Rodriguez Heredia<sup>3</sup>

Instituto de Engenharia do Araguaia, UNIFESSPA, Santana do Araguaia, PA

**Resumo.** Neste trabalho propõe-se uma modificação nos parâmetros do preconditionador fatoração controlada de Cholesky e na escolha da base do preconditionador separador com o objetivo de aprimorar o cálculo da direção de busca do método de pontos interiores primal-dual via o métodos iterativos preconditionados em duas fases. Nas iterações iniciais usa-se a fatoração controlada de Cholesky e em uma segunda fase o preconditionador separador é acionado. Os parâmetros que controlam o preenchimento e a correção das falhas que ocorrem na diagonal são modificados para reduzir o número de reinícios da fatoração durante a construção da fatoração controlada de Cholesky. O cálculo dos novos parâmetros é feito considerando a relação que existe entre as componentes da fatoração controlada de Cholesky obtida antes e depois da falha na diagonal. Este trabalho também considera o cálculo de uma base esparsa para o preconditionador separador com uma ordenação adequada das colunas da matriz de restrições do problema. Adicionalmente, apresenta-se um resultado teórico que mostra que, com o ordenamento proposto o número de condição da matriz preconditionada com o preconditionador separador é limitado uniformemente por uma quantidade que depende apenas dos dados originais do problema. Experimentos numéricos com problemas de grande porte corroboram a robustez e eficiência computacional desta abordagem.

**Palavras-chave.** Métodos de pontos interiores, Fatoração controlada de Cholesky, Número de condição, Preconditionador separador.

## 1 Introdução

O maior esforço computacional do método de pontos interiores (MPI) consiste no cálculo da direção de busca que é obtida resolvendo sistemas lineares. A direção de busca pode ser calculada resolvendo opcionalmente dois sistemas lineares; o sistema aumentado e o sistema de equações normais (SEN). Neste trabalho o SEN é resolvido usando uma abordagem de preconditionamento híbrido. As iterações iniciais usam o preconditionador fatoração

---

<sup>1</sup>aurelio@ime.unicamp.br

<sup>2</sup>o.cecilita@hotmail.com

<sup>3</sup>rodriguezheredia@hotmial.com

controlada de Cholesky (FCC) [2]. No entanto, seu desempenho deteriora à medida que o MPI se aproxima de uma solução ótima, isto pode ser justificado porque o número de condição do SEN é da ordem  $\mathcal{O}(\mu^{-2})$ , onde  $\mu$  denota o *gap* de dualidade [4]. O preconditionador separador (PS) [7], é calculado considerando a condição de complementariedade do problema de programação linear (PL) sendo usado nas últimas iterações.

O preconditionador FCC é fatoração incompleta de Cholesky (FIC), seu preenchimento em [2] permite que o preconditionador varie de uma matriz diagonal até uma matriz com mais elementos não nulos que a matriz da FIC clássica. A FIC é suscetível a falhas na diagonal, no entanto, se uma matriz  $V$  é simétrica definida positiva, existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que uma FIC de  $V + \alpha \text{diag}(V)$  existe [5]. No cálculo do FCC original as falhas que ocorrem durante a fatoração são corrigidas com um incremento exponencial e o cálculo dos elementos do preconditionador é reiniciado. Neste trabalho, usam-se ferramentas algébricas e geométricas para obter relações entre os elementos que ocasionaram a falha e as novas componentes da matriz obtidas com o incremento, além disso observou-se que o parâmetro que controla o preenchimento no FCC está relacionado com o incremento da diagonal. Usando estas relações propõe-se uma modificação destes parâmetros com o objetivo de reduzir o número de reinícios da fatoração.

Na segunda fase do preconditionador híbrido, o desempenho do PS depende de uma submatriz não singular  $B$  da matriz de restrições  $A$  do PL, a escolha das colunas de  $B$  é feita usando ordenações das colunas da matriz  $A$ . Os autores do PS e posteriormente os seus colaboradores [8], desenvolveram ordenamentos baseados em heurísticas. No entanto, existem problemas onde a abordagem falha ou que demandam muito tempo computacional. Assim, com respeito ao PS, o objetivo deste trabalho consiste em realizar um estudo do número de condição do SEN preconditionado pelo PS e, a partir deste estudo ordenar as colunas da matriz de restrições do PL para construir uma base esparsa que forneça um número de condição limitado.

A nova abordagem é comparada com a versão atualmente utilizada [8]. Os testes computacionais mostram que a nova proposta é mais eficiente e robusta.

## 2 Direção de busca no método de Pontos Interiores

Considere os problemas primal (P)  $\{\min c^T x \quad \text{s. a } Ax = b, x + s = u \quad x, s \geq 0\}$  e dual (D)  $\{\max b^T y - u^T w \quad \text{s. a } A^T y - w + z = c \quad w, z \geq 0 \quad y \in \mathbb{R}^m\}$  de PL, onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tem posto completo e  $x, s, w, z \in \mathbb{R}^n$ . Aplicando barreira logarítmica em (P), obtém-se:

$$(P') \left\{ \min c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \log x_i - \mu \sum_{i=1}^n \log s_i \quad \text{s. a } Ax = b, x + s = u \quad x, s > 0 \right\}.$$

O método de Newton é aplicado nas condições de otimalidade de (P') para encontrar a direção de busca  $d = (\Delta x, \Delta s, \Delta y, \Delta z, \Delta w)^T$  numa iteração do MPI. Se  $r_b = b - Ax$ ,

$r_u = u - x - s$ ,  $r_c = c + w - z - A^T y$  com  $e^T = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ , a direção de busca é calculada a partir da solução do sistema linear:

$$A\Theta A^T \Delta y = h + AD r,$$

onde  $\Theta^{-1} = X^{-1}Z + S^{-1}W$ ,  $r = r_c - X^{-1}(\mu e - XZe) + S^{-1}(\mu e - SWe) - S^{-1}W r_u$ ,  $h = r_b$  e  $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $Z = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ ,  $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ ,  $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$  são matrizes diagonais. Este sistema linear é conhecido como SEN, sua matriz é simétrica definida positiva de dimensão  $m$ . As demais componentes do vetor da direção de busca são obtidas recursivamente a partir de  $\Delta y$  de forma relativamente barata.

### 3 Novas Propostas

Doravante, denota-se por  $\mathcal{A}$  a matriz  $A\Theta A^T$ . Suponha que  $\mathcal{A}$  é uma matriz escalonada, isto é  $a_{jj} = 1$  e  $a_{ij} \leq 1$  para  $i, j = 1, \dots, m$ . Na construção do FCC diz-se que existe uma falha na diagonal quando  $d_j < \epsilon$  para algum  $j = 1, \dots, m$ . A proposta para o cálculo do novo incremento considera a fatoração  $LDL^T$ . Neste caso, se  $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \alpha I$ , procuram-se as matrizes  $L$ ,  $D$ ,  $\bar{L}$  e  $\bar{D}$  tal que  $\mathcal{A} = LDL^T$  e  $\bar{\mathcal{A}} = \bar{L} \bar{D} \bar{L}^T$ . Logo,

$$\bar{d}_j = d_j + \alpha + \sum_{k=1}^{j-1} (d_k \ell_{jk}^2 - \bar{d}_k \bar{\ell}_{jk}^2); \quad \bar{\ell}_{ij} = \ell_{ij} \frac{d_j}{\bar{d}_j} + \frac{1}{\bar{d}_j} \sum_{k=1}^{j-1} (\ell_{ik} d_k \ell_{jk} - \bar{\ell}_{ik} \bar{d}_k \bar{\ell}_{jk}), \quad (1)$$

para  $j = 1, \dots, m$  e  $i = j + 1, \dots, m$ . Baseado nas equações em (1) temos a Proposição 3.1, permitindo a construção dos novos parâmetros para a correção de falhas.

**Proposição 3.1.** Quando  $d_j < \epsilon$ , a função  $F_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^{t-1} \bar{d}_k \bar{\ell}_{tk}^2$  é decrescente, onde  $t = 2, \dots, j$  e  $F_t(0) = \sum_{k=1}^{t-1} d_k \ell_{tk}^2$ . Além disso, para cada  $\alpha \geq \epsilon - d_j$  temos  $\bar{d}_j > \epsilon$  e se  $0 < d_j < \epsilon$ , para cada  $\alpha \geq \epsilon$  temos  $\bar{d}_j > \epsilon$ .

Como consequência da proposição acima, um incremento  $\alpha_t = \epsilon - d_j$  poderia ser usado. No entanto, procura-se que  $\alpha_t$  seja o menor possível para que  $\bar{\mathcal{A}} \approx \mathcal{A}$ . Observe que nada garante que  $\epsilon - d_j$  seja pequeno. Quando  $d_j < \epsilon$ , deve-se resolver:  $(\bar{P}_\alpha) \{ \min \alpha \text{ s. a } \sum_{k=1}^{j-1} \bar{d}_k \bar{\ell}_{jk}^2 \leq a_{jj} + \alpha - \epsilon; \alpha > 0 \}$ , visando  $\bar{\mathcal{A}} \approx \mathcal{A}$ . Esta abordagem é consequência da equação (1) e de que para cada  $\alpha > 0$ ,  $\bar{d}_j > \epsilon$  é satisfeita se, e somente se,  $\sum_{k=1}^{j-1} \bar{d}_k \bar{\ell}_{jk}^2 \leq a_{jj} + \alpha - \epsilon$ . Observe que neste caso, os valores  $\bar{d}_k$  e  $\bar{\ell}_{jk}$  não são conhecidos, para  $k = 1, \dots, j - 1$ . Para evitar a resolução de  $(\bar{P}_\alpha)$ , procura-se uma função que seja equivalente a  $\sum_{k=1}^{j-1} \bar{d}_k \bar{\ell}_{jk}^2$  quando  $\alpha$  se aproxima de zero<sup>4</sup>. Para tanto, consideram-se as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(d_k \ell_{jk})^2}{d_k + \alpha}$  e  $\alpha \mapsto \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\alpha}{d_k + \alpha} d_k \ell_{jk}^2$ , respectivamente. Usa-se  $f$  e  $g$ , pois  $(f + g)(\alpha) = \sum_{k=1}^{j-1} d_k \ell_{tk}^2$  e pela Proposição 3.1, tem-se  $\sum_{k=1}^{j-1} \bar{d}_k \bar{\ell}_{jk}^2 \leq (f + g)(\alpha)$ . Dado que  $f(\alpha) \sim \sum_{k=1}^{j-1} \bar{d}_k \bar{\ell}_{jk}^2$  quando  $\alpha$  se aproxima de zero, procura-se a solução de  $(P_\alpha) \{ \min \alpha \text{ s. a } f(\alpha) \leq a_{jj} - \epsilon; \alpha > 0 \}$ , para obter uma aproximação da solução de

<sup>4</sup> As funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são equivalentes,  $f \sim g$ , quando  $x$  se aproxima de  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

$(\bar{P}_\alpha)$ . Como  $f$  é uma função decrescente  $\alpha$  é solução de  $(P_\alpha)$  se, e somente se,  $f(\alpha) = a_{jj} - \epsilon$ . Usa-se o método de Newton para calcular numericamente este valor.

Nesta proposta procura-se que o preenchimento da matriz da FCC dada por  $\tilde{L}$  se aproxime do preenchimento abaixo da diagonal de  $\mathcal{A}$ , isto é,  $\text{nnz}(\tilde{L}) \approx (\text{nnz}(\mathcal{A}) - m)/2$ . Observe que o parâmetro  $\eta$  satisfaz a seguinte igualdade:  $\text{nnz}(\tilde{L}) = (\text{nnz}(\mathcal{A}) + m)/2 + \eta m$  que é obtida da definição de FCC, assim usa-se esta relação para determinar o novo valor de  $\eta$ . Para determinar o  $\eta$  inicial, denotado por  $\eta_0$ , calcula-se o quociente  $\text{nnz}(\mathcal{A})/\text{nnz}(A)$  e a partir dele tem-se os seguintes casos: (i)  $\eta_0 = 1$ , se  $1 \leq \text{nnz}(\mathcal{A})/\text{nnz}(A) < 2$ ; (ii)  $\eta_0 = -\text{nnz}(\mathcal{A})/m$ , caso contrário. Se número de iterações do método dos gradientes conjugados preconditionado é maior que  $m/5$ . A heurística para determinar o incremento do  $\eta$  é dada por: (i)  $\eta_k = 1$ , quando  $\eta_0 = 1$ ; (ii)  $\eta_k = \eta_{k-1}/2$ , caso contrário. Se para cada  $j = 1, \dots, m$  e  $i = j + 1, \dots, m$ ,  $|\bar{\ell}_{ij}| < 1/1 + \alpha$  na iteração  $k - 1$ , então o valor de  $\eta_k$  será incrementado,  $\eta_k = \eta_{k-1}/2$ , se  $\eta_{k-1} < 0$ . O  $\eta$  final, denotado por  $\eta_f$ , em ambos os casos (i) e (ii) é  $\eta_f = 1$ . Assim, o maior preenchimento permitido para  $L$ , será  $(\text{nnz}(\mathcal{A}) + m)/2 + m$ .

### 3.1 Nova proposta para encontrar a base do preconditionador Separador

Para fazer uma análise espectral de  $A\Theta A^T$  preconditionada pelo PS suponha que  $(\lambda, v)$  seja um autopar de  $I + WW^T$ ; isto é,  $v + WW^T v = \lambda v$ , multiplicando por  $v^T$ , tem-se  $|\lambda| \geq 1$ . Além disso,  $\lambda_{\max}(PA\Theta A^T P^T) = \|PA\Theta^{1/2}\|_2^2 \leq \|PAD^{1/2}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n d_j \|PA_j\|_2^2$  assim usamos esta relação para procurar um limitante do número de condição  $\kappa(P(A\Theta A^T)P^T) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leq \lambda_{\max}$ . Encontrar colunas linearmente independentes de  $A$  para formar a base do PS pode demandar muito uso de memória pois este procedimento é feito calculando uma fatoração LU da matriz  $A$ , um pivô nulo ou próximo de zero indica que a coluna correspondente a este pivô é linearmente dependente. Quando o preenchimento é excessivo a fatoração LU é reiniciada reordenando as colunas linearmente independentes encontradas. A nova abordagem propõe uma ordenação que considera simultaneamente bom condicionamento e esparsidade para a base do PS. Para tanto, denote por  $\text{nnz}(A_j)$  = número de elementos não nulos na coluna  $A_j$ , observe que  $1 \leq \text{nnz}(A_j) \leq m$ , e em problemas esparsos  $\text{nnz}(A_j) \ll m$ . Seja  $k_j = \theta_j^{1/2}/\text{nnz}(A_j)$  e considere uma ordenação decrescente dos valores  $k_j$ . Com esse ordenamento propõe-se o seguinte algoritmo:

---

**Algoritmo 1:** Ordenamento para encontrar uma nova base no PS.

---

**Entrada:** A matriz de restrições  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de posto  $m$  e a matriz diagonal  $\Theta$ .

**Saída:** Os conjuntos de índices básicos  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$  e não básicos  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$ . Obter a permutação  $\sigma$  do conjunto  $\{1, \dots, n\}$  tal que:  $k_{\sigma(1)} \geq k_{\sigma(2)} \geq \dots \geq k_{\sigma(n)}$ ;

Defina  $\mathcal{B} = \emptyset$ ,  $i = 1$ ,  $k = 0$ ;

**Enquanto**  $|\mathcal{B}| < m$  **faça**

Se  $A_{\sigma(i)}$  é linearmente independente a  $\{A_j : j \in \mathcal{B}\}$  **então**

┌  $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{\sigma(i)\}$ ;  $k = k + 1$ ;  $b_k = \sigma(i)$ ;

└  $i = i + 1$ .

---

A ordem decrescente dos valores  $k'_j$ s é motivada pela seguinte razão: se as colunas  $A_{j_1}$  e  $A_{j_2}$  satisfazem  $1/\text{nnz}(A_{j_1}) \geq 1/\text{nnz}(A_{j_2})$ , ou seja,  $A_{j_1}$  é mais esparsa que  $A_{j_2}$ , a coluna  $A_{j_1}$  terá prioridade sobre  $A_{j_2}$  se  $\theta_1 \geq \theta_2$ . Assim, enquanto os valores  $\theta_j^{1/2}$  garantem o bom condicionamento no Teorema 3.1, as quantidades  $\text{nnz}(A_j)$  procuram dar prioridade às colunas mais esparsas no cálculo da base do PS. O algoritmo acima e a prova do Teorema 3.1 são baseados em [6] acrescentando a condição que leva em consideração a esparsidade da matriz  $A$ . Para simplificar a notação considera-se a permutação  $\sigma$  como sendo a permutação identidade, além disso, denota-se  $A_{\mathcal{B}}$  simplesmente por  $B$ .

**Teorema 3.1.** *Sejam os índices básicos  $\mathcal{B}$  e não básicos  $\mathcal{N}$  do PS obtidos pelo Algoritmo 1, então: (i)  $\theta_j^{1/2} \|\Theta_{\mathcal{B}}^{-1/2} B^{-1} A_j\| = 1$  para  $j \in \mathcal{B}$ ;*  
*(ii)  $\theta_j^{1/2} \|\Theta_{\mathcal{B}}^{-1/2} B^{-1} A_j\| \leq \text{nnz}(A_j) \|B^{-1} A_j\|$  para  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$ .*  
*Adicionalmente,  $\kappa(PA\Theta A^T P^T) \leq nK^2 \|B^{-1} A\|^2$ , se  $K = \max\{\text{nnz}(A_j) : j = 1, \dots, n\}$ .*

Observe que no Teorema 3.1 o limitante de  $\kappa(PA\Theta A^T P^T)$  depende apenas dos dados do problema e não da iteração do MPI e em problemas com matrizes esparsas  $K \ll m$ .

## 4 Resultados Numéricos

Os experimentos foram realizados utilizando a versão modificada do PCx [3], nesta versão, o método direto usado para a solução dos sistemas lineares foi substituído por um método iterativo [1].

Os testes realizados comparam a Abordagem Híbrida  $AH$  proposta em [8], e a abordagem apresentada neste trabalho  $AH_{mod}$ . No PS, a base  $B$  pode ser mantida em algumas iterações do MPI, esta base é trocada quando  $8 * n_g \geq m$ , onde  $n_g$  denota o número de iterações do método dos GCP em uma iteração do MPI. Os problemas utilizados são de domínio público das bibliotecas Netlib, QAP e Kennington.

As duas primeiras colunas da Tabela 1 indicam o número de linhas e de colunas dos problemas preprocessados. São comparados o número de reinícios no cálculo do FCC correspondentes a todas as iterações da primeira fase, o tempo em que cada problema foi resolvido e finalmente, nas duas últimas colunas apresenta-se o número de iterações do MPI para resolver cada problema.

Foram testados problemas de grande porte onde  $m$  ou  $n$  são maiores que 5000. As diferenças mais significativas estão em negrito. O símbolo – indica que o problema não foi resolvido, os símbolos “†” e “‡” significam que o número total de reinícios foi maior que 15, em uma iteração e em mais de uma iteração do MPI, respectivamente.

Tabela 1: Problemas Testes e Tempo Total de Processamento.

Problema	Linhas	Colunas	AH	AHmod	AH	AHmod	AH	AHmod
maros-r7	2152	7440	173 <sup>‡</sup>	13	16, 24	<b>8,90</b>	30	22
NL	6665	14680	284	75	33, 74	<b>23,74</b>	41	41
BL	5729	12462	261	100	18, 05	<b>15,10</b>	38	38
stocfor3	15362	22228	199	55	89, 50	<b>55,41</b>	32	32
els19	4350	13186	78	50	43, 51	<b>42,06</b>	31	31
chr22b	5587	10417	79	38	19, 10	<b>18,19</b>	29	29
chr25a	814	15325	64 <sup>‡</sup>	37	38, 60	<b>36,35</b>	29	28
qap12	2794	8856	64 <sup>‡</sup>	5	–	<b>104,06</b>	–	20
scr15	2234	6210	64 <sup>‡</sup>	43	<b>6,49</b>	6, 58	24	24
scr20	5079	15980	74	55	60, 18	<b>52,76</b>	21	21
rou20	7359	37640	81	43	754, 32	<b>658,29</b>	24	24
cre-a	2989	6692	116 <sup>‡</sup>	29	7, 02	<b>4,25</b>	28	27
cre-b	5328	36382	288	147	43, 33	<b>37,79</b>	43	43
cre-c	2370	5412	64 <sup>‡</sup>	34	6, 29	<b>2,69</b>	26	26
cre-d	4094	28601	281	131	27, 76	<b>25,88</b>	42	42
ex05	832	7805	96 <sup>‡</sup>	61	12, 37	<b>5,01</b>	65	39
ex09	1821	18184	319	86	47, 94	<b>43,98</b>	45	45
osa-14	2300	54760	0	4	–	<b>1,28</b>	–	18
osa-30	4313	104337	0	7	–	<b>3,82</b>	–	23
osa-60	10243	243209	0	6	–	<b>14,54</b>	–	23
ken11	9964	16740	74	20	10, 42	<b>8,19</b>	23	22
ken13	22365	36561	73	38	94, 63	<b>56,10</b>	29	29
ken18	78538	128434	103	45	1052, 51	<b>901,08</b>	41	37
pds-06	9145	28472	216	60	8, 34	<b>7,88</b>	39	39
pds-10	16558	48763	256	69	18, 49	<b>16,78</b>	47	47
pds-20	32276	106180	322	90	212, 79	<b>210,62</b>	60	61
pds-30	49944	158489	388 <sup>†</sup>	100	479, 12	<b>217,09</b>	75	74
pds-40	34265	214385	479	135	410, 47	<b>396,32</b>	78	79
pds-50	80328	272513	392 <sup>†</sup>	142	1598, 78	<b>798,59</b>	80	80
pds-60	96503	332862	492	150	1096, 77	<b>1064,20</b>	84	84
pds-70	111885	386238	402 <sup>†</sup>	153	2734, 60	<b>1321,51</b>	85	85
pds-80	126109	430800	478	166	<b>1526,79</b>	1597, 84	83	83
pds-90	139741	475448	420 <sup>†</sup>	146	4109, 84	<b>1869,22</b>	81	80
pds-100	156243	514577	508	190	2631, 49	<b>2448,85</b>	87	87

Observa-se que em 10 problemas o número de iterações do MPI foi reduzido. Os problemas **qap12**, **osa-14**, **osa-30** e **osa-60** não foram resolvidos pela abordagem *AH*. Já no problema **pds-40** o número de iterações com a abordagem *AH<sub>mod</sub>* aumentou. Com respeito ao tempo usado para resolver os problemas, a abordagem *AH<sub>mod</sub>* foi superior em 32 dos 34 problemas apresentados. Finalmente pode-se observar na quinta coluna da tabela 1 que

na abordagem  $AH_{mod}$  nenhuma iteração do MPI realizou 15 reinícios no cálculo do FCC. Pode-se observar que se existe falha na diagonal e o número reinícios no FCC é maior que 15 o tempo de processamento é incrementado, como nos problemas **pds-30**, **50**, **70** e **90**.

## 5 Conclusões

As modificações no FCC tanto no parâmetro de correção de falhas na diagonal  $\alpha$  quanto no parâmetro de preenchimento  $\eta$  reduziram o número de reinícios no cálculo deste preconditionador, o número máximo de reinícios permitidos não foi atingido em nenhum problema, disso resultou que o número de iterações do método GCP reduziu e, portanto, o tempo de processamento correspondente à primeira fase da  $AH_{mod}$  também reduziu. No PS, o cálculo da base foi acelerado porque as colunas esparsas geraram menos preenchimento e além disso, o ordenamento proposto para o PS obteve um bom desempenho pois o número de iterações do GCP não aumentou e o esforço para calcular  $B$  diminuiu.

## Referências

- [1] S. Bocanegra, F. F. Campos, and A. R. L. Oliveira. Using a hybrid preconditioner for solving large-scale linear systems arising from interior point methods. *Computational Optimization and Applications*, 36(2-3):149–164, 2007.
- [2] F. F. Campos. *Analysis of conjugate gradients-type methods for solving linear equations*. PhD thesis, University of Oxford, 1995.
- [3] J. Czyzyk, S. Mehrotra, M. Wagner, and S. J. Wright. PCx an interior point code for linear programming. *Optimization Methods & Software*, 11:397–430, 1999.
- [4] J. Gondzio. Matrix-free interior point method. *Computational Optimization and Applications*, 51:457–480, 2012.
- [5] T. A. Maunteuffel. An incomplete factorization technique for positive definite linear systems. *Mathematics of computation*, 34(150):473–497, 1980.
- [6] R. D. C. Monteiro, J. W. O’Neal, and T. Tsuchiya. Uniform boundedness of a preconditioned normal matrix used in interior-point methods. *SIAM Journal on Optimization*, 15(1):96–100, 2004.
- [7] A. R. L. Oliveira and D. C. Sorensen. A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming. *Linear Algebra and its applications*, 394:1–24, 2005.
- [8] M. I. Velazco, A. R. L. Oliveira, and F. F. Campos. A note on hybrid preconditioners for large-scale normal equations arising from interior-point methods. *Optimization Methods & Software*, 25(2):321–332, April 2010.