Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Condições Suficientes de Otimalidade em Cálculo das Variações no Contexto Não-Suave

Caroline de Arruda Signorini[1]
Valeriano Antunes de Oliveira[2]
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP - Univ. Estatual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, Departamento de Matemática Aplicada.

Resumo. O principal propósito deste trabalho é o estudo de condições suficientes de otimalidade para problemas de Cálculo das Variações no contexto não-suave, caso em que consideramos Lagrangianas não-suaves e soluções absolutamente contínuas. Analisaremos as condições suficientes através de um conceito de convexidade generalizada, o qual denominamos E-pseudoinvexidade.

Palavras-chave. Cálculo das variações, Lagrangianas não-suaves, Condições suficientes de otimalidade, Soluções absolutamente contínuas, Convexidade generalizada.

1 Introdução

Segundo van Brunt [2], o Cálculo Variacional, também conhecido como Cálculo das Variações, tem uma longa história de interação com outras ramificações da Matemática, como a geometria e as equações diferenciais, e da Física, particularmente a mecânica. Recentemente, o Cálculo Variacional vem encontrando aplicações em outros campos, como economia, engenharia e recursos renováveis. Grande parte da matemática subjacente à Teoria do Controle, por exemplo, pode ser considerada parte do Cálculo Variacional.

Ainda que a teoria clássica do Cálculo das Variações tenha origem no século XVII, importantes questões, como as regras de multiplicadores para os problemas com restrições e o teorema de existência de soluções, somente foram elucidadas no século passado, devido ao desenvolvimento nos estudos de Análise Funcional e Cálculo Não-suave.

Neste trabalho, temos por objetivo o estudo de condições suficientes de otimalidade para problemas de Cálculo das Variações no contexto não-suave. Aqui tratamos o problema de Bolza, trabalhando com Lagrangianas não-suaves e um conjunto de condições necessárias de otimalidade envolvendo a inclusão de Euler, o que nos exige o uso de ferramentas da Análise Não-suave.

Sabemos que, geralmente, as condições necessárias de otimalidade para problemas variacionais são suficientes por meio da convexidade dos dados envolvidos, como podemos ver

[1]carolineasignorini@gmail.com
[2]antunes@ibilce.unesp.br

em Clarke [3]. Isso também ocorre quando utilizados certos conceitos convexidade generalizada: em Arana–Jiménez, Osuna–Gómez, Ruiz–Garzón, Rojas–Medar [1], são abordados problemas variacionais com restrições de desigualdade e multiplicadores estão envolvidos na definição; já em Rojas–Jara [5], onde são abordados problemas variacionais com restrições de igualdade, foram obtidas condições suficientes sem a presença dos multiplicadores na definição.

Em Signorini [6], foi introduzida a E-pseudoinvexidade (Euler-pseudoinvexidade): um conceito de convexidade generalizada para problemas variacionais através do qual as condições de transversalidade e a equação/inclusão de Euler tornam-se suficientes para otimalidade global. Tal conceito de convexidade generalizada possui a peculiaridade de ser o mais geral possível, no sentido de que todo problema variacional em que as soluções estacionárias são ótimas necessariamente são E-pseudoinvexos. Aqui apresentaremos o conceito para o caso não-suave.

2 Lagrangianas não-suaves

Abordaremos aqui um contexto não compreendido pela teoria clássica do Cálculo das Variações: o estudo de problemas que envolvem Lagrangianas não-suaves.

2.1 O Problema Lipschitz de Bolza

Consideremos o seguinte problema conhecido como *o Problema de Bolza*:

$$\begin{aligned} &\textsf{minimizar} \quad J(x) = \ell_0\left(x(a)\right) + \ell_1\left(x(b)\right) + \int_a^b \Lambda\left(t, x(t), x'(t)\right) dt \\ &\textsf{sujeito a} \quad x \in \textsf{AC}\left([a,b];\mathbb{R}^n\right), \\ &\qquad\qquad\quad x(a) \in C_0, \;\; x(b) \in C_1, \;\; x'(t) \in V(t) \;\; \textsf{q.t.p.}, \end{aligned} \tag{PLB}$$

onde $\ell_0, \ell_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são localmente Lipschitz, C_0, C_1 são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ e a multifunção $V : [a,b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é mensurável a conjuntos fechados e convexos de $\mathbb{R}^n$.

Ressaltamos que, a seguir, as notações $\partial_P \Lambda$ e $\partial_L \Lambda$ se referem aos subdiferenciais proximal e limite, respectivamente, da função $\Lambda(t,x,v)$ tomados com respeito às variáveis (x,v). E, dados um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $x \in S$, as notações $T_S(x)$, $N_S(x)$, $T_S^C(x)$ e $N_S^L(x)$ se referem aos cones tangente (de Bouligand), normal, tangente generalizado e normal limite, respectivamente, a S em x. Para mais detalhes das notações acima, ver Clarke [3], pp. 145 e 232 para os subdiferenciais e pp. 20, 21, 212 e 244 para os cones.

Definição 2.1. *Um* arco (função absolutamente contínua) *x é dito ser **admissível** para o problema* (PLB) *se satisfaz as restrições do problema e se a integral em $J(x)$ é bem definida e finita.*

*Dizemos que uma função admissível x_* fornece um **mínimo global** para o problema se $J(x_*) \leqslant J(x)$ para todo x admissível.*

*Um arco admissível x_* fornece um **mínimo local fraco** se, para algum $\varepsilon > 0$, tem-se $J(x_*) \leqslant J(x)$ para todo arco admissível x satisfazendo $\|x - x_*\|_\infty \leqslant \varepsilon$ e $\|x' - x_*'\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

E dizemos que um arco admissível x_* fornece um ***mínimo local forte*** *se existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(x_*) \leqslant J(x)$ para todo arco admissível x que satisfaz $\|x - x_*\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

O seguinte resultado fornece, sob certas circunstâncias, condições necessárias para que um arco admissível seja um mínimo local forte para (PLB).

Teorema 2.1. *Seja x_* um arco admissível e mínimo local forte para* (PLB). *Supomos que a Lagrangiana $\Lambda : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é mensurável em relação a t e* Lipschitz com respeito a (x,v) próximo a x_* *no seguinte sentido: existe uma função integrável $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que, para quase todo t, para todo $x, y \in B(x_*(t), \varepsilon)$ e $v, w \in V(t)$, seja válida a* Hipótese Lipschitz

$$|\Lambda(t,x,v) - \Lambda(t,y,w)| \leqslant k(t)\left(\|x-y\| + \|v-w\|\right). \tag{HL}$$

Exigimos também a Hipótese de Interioridade*: existe uma constante positiva δ tal que*

$$B\left(x_*'(t), \delta\right) \subset V(t) \ \text{ q.t.p.}$$

Sob essas condições, existe um arco p satisfazendo a ***inclusão de Euler****:*

$$p'(t) \in \mathrm{co}\left\{\omega : (\omega, p(t)) \in \partial_L \Lambda\left(t, x_*(t), x_*'(t)\right)\right\} \quad t \in [a,b] \text{ q.t.p.}, \tag{E}$$

juntamente com a ***condição de Weierstrass****: para quase todo t,*

$$\Lambda(t, x_*(t), v) - \Lambda\left(t, x_*(t), x_*'(t)\right) \geqslant \langle p(t), v - x_*'(t)\rangle \ \ \forall\, v \in V(t) \tag{W}$$

e as ***condições de transversalidade e de fronteira****:*

$$\begin{cases} p(a) \in \partial_L \ell_0\left(x_*(a)\right) + N_{C_0}^L\left(x_*(a)\right) \\ -p(b) \in \partial_L \ell_1\left(x_*(b)\right) + N_{C_1}^L\left(x_*(b)\right). \end{cases} \tag{T}$$

(Demonstração em Clarke [3], Teorema 18.1, pp. 348, 354-360)

Observe que a Hipótese Lipschitz (HL) vale se V é uniformemente limitada e Λ é localmente Lipschitz. Assim, o teorema acima se aplica, em particular, para um *mínimo local fraco* x_* na classe $\mathrm{Lip}[a,b]$ e para Lagrangiana localmente Lipschitz, tomando $V(t)$ da forma $B(x_*'(t), \delta)$. Desta maneira, a Hipótese de Interioridade vale automaticamente.

Note também que a diferenciabilidade de Λ não é assumida. Como sabemos, quando Λ é continuamente diferenciável em (x,v), o conjunto $\partial_L \Lambda$ é composto unicamente pelo gradiente. Nesse caso, (E) é equivalente à forma integral da equação de Euler expressa em termos da variável de coestado p, isto é,

$$p'(t) = \nabla_x \Lambda\left(t, x_*(t), x_*'(t)\right), \ \ p(t) = \nabla_v \Lambda\left(t, x_*(t), x_*'(t)\right).$$

Exemplo 2.1. O seguinte problema ilustra a utilidade de enfraquecer as hipóteses de regularidade sobre a Lagrangiana:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \int_0^2 \vartheta(t)\sqrt{1 + x'(t)^2}\,dt \\ &\text{sujeito a} \quad x(0) = 0, \ \ x(2) = 2, \end{aligned}$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0341

onde

$$\vartheta(t) = \begin{cases} v_0^{-1} & \text{se } t < 1 \\ v_1^{-1} & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Note que, neste caso, a Lagrangiana é descontínua porém mensurável na variável t.

2.2 Condições suficientes por E-pseudoinvexidade no contexto não-suave

Nesta seção, trataremos o conceito de problema E-pseudoinvexo, introduzido por Signorini [6], para o cenário não-suave dos problemas variacionais. Veremos que a inclusão de Euler e a condição de transversalidade do Teorema 2.1 tornam-se condições suficientes para otimalidade global sob hipóteses de E-pseudoinvexidade (Euler-pseudoinvexidade).

Definição 2.2. *Dizemos que* $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *é uma* ***função estacionária*** *para o problema* (PLB) *se* x *é admissível para* (PLB) *e se existe um arco* $p : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *para o qual as condições* (E) *e* (T) *do Teorema 2.1 são satisfeitas.*

Definição 2.3. *Dizemos que o problema* (PLB) *é* ***E-pseudoinvexo*** *se, para cada par* x, y *de arcos admissíveis tais que* $J(y) < J(x)$ *e para cada tripla* $(\zeta, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathsf{AC}\,[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *com*

$$\zeta'(t) \in \mathsf{co}\big\{\omega : (\omega, \zeta(t)) \in \partial_L \Lambda\big(t, x(t), x'(t)\big)\big\}, \quad t \in [a, b] \ \text{ q.t.p.}, \tag{1}$$

e

$$(\alpha_0, \alpha_1) \in \partial_L \ell_0\big(x(a)\big) \times \partial_L \ell_1\big(x(b)\big), \tag{2}$$

existe um arco $\gamma = \gamma(x, y, \zeta, \alpha_0, \alpha_1) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo*

$$\gamma(a) \in T^C_{C_0}\big(x(a)\big), \qquad \gamma(b) \in T^C_{C_1}\big(x(b)\big), \tag{3}$$

e

$$\int_a^b \Big[\zeta'(t)^T \gamma(t) + \zeta(t)^T \gamma'(t)\Big] dt + \gamma(a)^T \alpha_0 + \gamma(b)^T \alpha_1 < 0. \tag{4}$$

Note que a Definição 2.3 estende para o contexto de Cálculo das Variações o conceito de pseudoinvexidade em Programação Matemática apresentado por Hanson em [4].

O próximo resultado estabelece a E-pseudoinvexidade como condição suficiente para que uma função estacionária para (PLB) seja um mínimo global do problema.

Teorema 2.2. *Se* (PLB) *é E-pseudoinvexo, então toda função estacionária* x *é um mínimo global.*

Demonstração: Suponha que x seja uma função estacionária não-ótima para (PLB). Então existe um arco y admissível para (PLB) tal que $J(y) < J(x)$. Como x é uma função estacionária, existe uma aplicação $p \in \mathsf{AC}\,[a, b]$ satisfazendo as condições (E) e (T) do Teorema 2.1. Deste modo, existem $\alpha_0 \in \partial_L \ell_0\big(x(a)\big)$, $\nu_0 \in N^L_{C_0}\big(x(a)\big)$, $\alpha_1 \in \partial_L \ell_1\big(x(b)\big)$ e $\nu_1 \in N^L_{C_1}\big(x(b)\big)$ tais que $p(a) = \alpha_0 + \nu_0$ e $-p(b) = \alpha_1 + \nu_1$. Assim, pela hipótese de E-pseudoinvexidade, existe um arco $\gamma = \gamma(x, y, p, \alpha_0, \alpha_1) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0341

as condições (3) − (4). Usando o Teorema fundamental do Cálculo, a condição (3) e a definição de ν_0 e ν_1, temos

$$0 > \int_a^b \left[p'(t)^T\gamma(t) + p(t)^T\gamma'(t)\right]dt + \gamma(a)^T\alpha_0 + \gamma(b)^T\alpha_1 = -\gamma(a)^T\nu_0 - \gamma(b)^T\nu_1 \geqslant 0,$$

uma contradição. Portanto, x é mínimo global.

■

O teorema abaixo estabelece como condição necessária a E-pseudoinvexidade para que toda função estacionária seja um mínimo global do problema (PLB).

Teorema 2.3. *Se toda função estacionária de* (PLB) *é um mínimo global, então o problema* (PLB) *é E-pseudoinvexo.*

Demonstração: Negando a definição de E-pseudoinvexidade, obtemos a existência de um par x, y de arcos admissíveis com $J(y) < J(x)$ e de uma tripla $\big(\zeta, \alpha_0, \alpha_1\big)$ em $\mathsf{AC}\,[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ satisfazendo (1) − (2) de modo que, para todo arco $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que cumpra (3), a desigualdade (4) não é válida.

Agora, como $\gamma_* \equiv 0$ é um mínimo global para o problema auxiliar

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && F(\gamma) = \alpha_0^T\gamma(a) + \alpha_1^T\gamma(b) + \int_a^b \Big[\zeta'(t)^T\gamma(t) + \zeta(t)^T\gamma'(t)\Big]dt \\
&\text{sujeito a} && \gamma \in \mathsf{AC}\ ([a,b];\mathbb{R}^n)\,, \\
& && \gamma(a) \in T^C_{C_0}\,(x(a))\,,\ \ \gamma(b) \in T^C_{C_1}\,(x(b))\,,\ \ \gamma'(t) \in \mathbb{R}^n\ \text{ q.t.p.},
\end{aligned}$$

podemos aplicar o Teorema 2.1, obtendo a existência de um arco $p : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned}
p'(t) &\in \mathsf{co}\,\{\omega : (\omega, p(t)) \in \partial_L f\,(t, \gamma_*(t), \gamma_*'(t))\} = \big\{\,(\zeta'(t), \zeta(t))\,\big\},\ \ t \in [a,b]\ \text{q.t.p.}, \\
p(a) &\in \partial_L h_0\,(\gamma_*(a)) + N^L_{T^C_{C_0}(x(a))}\,(\gamma_*(a)) = \{\alpha_0\} + N^L_{C_0}(x(a)) \\
-p(b) &\in \partial_L h_1\,(\gamma_*(b)) + N^L_{T^C_{C_1}(x(b))}\,(\gamma_*(b)) = \{\alpha_1\} + N^L_{C_1}(x(b)).
\end{aligned}$$

Sendo assim, p satisfaz a inclusão de Euler e a condição de transversalidade para o arco admissível x no problema original, de modo que x é uma função estacionária. Logo, por hipótese, x é um mínimo global, o que contradiz a desigualdade $J(y) < J(x)$. Concluímos, assim, que o problema (PLB) é E-pseudoinvexo.

■

Exemplo 2.2. A fim de ilustrar os resultados acima, temos o seguinte Problema de Bolza:

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && J(x) = 2x(0) + x(2) + \int_0^2 \big[1 - |x(t) - 1| + 2x(t) + 3tx'(t)\big]dt \\
&\text{sujeito a} && x \in \mathsf{AC}\,\big([0,2];\mathbb{R}\big), \\
& && x(0) \in [0,2],\ \ x(2) \in [0,3],\ \ x'(t) \in [0, 3t+2]\ \text{ q.t.p.}
\end{aligned}$$

Note, neste caso, que $\Lambda(t,x,v)$ não é diferenciável nem convexa em x e também que $x(t) \geqslant 0$ para todo x admissível.

Supondo que x_* seja uma função estacionária, existe um arco $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo a inclusão de Euler $p'(t) \in \mathsf{co}\Big\{\omega : \big(\omega, p(t)\big) \in \partial_L \Lambda\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big)\Big\}$ q.t.p., onde

$$\partial_L \Lambda\big(t, x_*(t), x_*'(t)\big) = \begin{cases} \{3\} & \times \quad \{3t\} \quad \text{se } 0 \leqslant x_*(t) < 1, \\ \{1\} \cup \{3\} & \times \quad \{3t\} \quad \text{se } x_*(t) = 1, \\ \{1\} & \times \quad \{3t\} \quad \text{se } x_*(t) > 1. \end{cases}$$

Assim, $p(t) = 3t$ para $0 \leqslant t \leqslant 2$, de modo que $p'(t) = 3$. Além disso, p satisfaz as condições de transversalidade e de fronteira

$$p(0) \in \partial_L \ell_0\big(x_*(0)\big) + N^L_{C_0}\big(x_*(0)\big) = \begin{cases} (-\infty, 2] & \text{se } x_*(0) = 0, \\ \{2\} & \text{se } x_*(0) \in (0,2), \\ [2, +\infty) & \text{se } x_*(0) = 2, \end{cases}$$

e

$$-p(2) \in \partial_L \ell_1\big(x_*(2)\big) + N^L_{C_1}\big(x_*(2)\big) = \begin{cases} (-\infty, 1] & \text{se } x_*(2) = 0, \\ \{1\} & \text{se } x_*(2) \in (0,3), \\ [1, +\infty) & \text{se } x_*(2) = 3. \end{cases}$$

Como $p(0) = 0$ e $-p(2) = -6$, segue que $x_*(0) = x_*(2) = 0$. Veja que, pela admissibilidade de x_*, temos $x_*'(t) \in [0, 3t+2]$, isto é, $x_*'(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [0,2]$. Visto que $x_* \in \mathsf{AC}\,[0,2]$, segue que há somente uma função estacionária para este problema: $x_* \equiv 0$. Como x_* é mínimo global, pelo Teorema 2.3, este problema deve ser E-pseudoinvexo.

De fato, considerando funções admissíveis x, y com $J(y) < J(x)$ e uma tripla $\big(\zeta, \alpha_0, \alpha_1\big)$ satisfazendo $(1) - (2)$, basta tomar a aplicação absolutamente contínua $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^n$ definida por $\gamma(t) = -\alpha_0 \zeta(t)$.

Observação 2.1. *A E-pseudoinvexidade é um tipo de convexidade generalizada, isto é, todo problema convexo é também E-pseudoinvexo. De fato, considere o problema*

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad J(x) = \ell_0\left(x(a)\right) + \ell_1\left(x(b)\right) + \int_a^b \Lambda\left(t, x(t), x'(t)\right) dt \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \mathsf{AC}\left([a,b]; \mathbb{R}^n\right), \\ &\qquad\qquad\quad x(a) \in C_0, \;\; x(b) \in C_1, \;\; x'(t) \in V(t) \;\; \text{q.t.p.} \end{aligned}$$

Além das hipóteses iniciais, suponha que as funções $\ell_0, \ell_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e os conjuntos $C_0, C_1 \subset \mathbb{R}^n$ são convexos. *Suponha também que a Lagrangiana $\Lambda(t,x,v)$ é* convexa *em (x,v). Assim, os subdiferenciais limite de ℓ_0, ℓ_1 e Λ em qualquer ponto coincidem com o subdiferencial da Análise Convexa neste mesmo ponto. Agora, sejam x, y arcos admissíveis com $J(y) < J(x)$ e a tripla $\big(\zeta, \alpha_0, \alpha_1\big) \in \mathsf{AC}\,[a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de modo que as condições $(1) - (2)$ sejam satisfeitas. Podemos tomar a aplicação absolutamente contínua $\gamma = \gamma(x,y,\zeta,\alpha_0,\alpha_1) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = \big[y(t) - x(t)\big]$, obtendo*

$$\gamma(a) \in T^C_{C_0}\big(x(a)\big) = T_{C_0}\big(x(a)\big), \qquad \gamma(b) \in T^C_{C_1}\big(x(b)\big) = T_{C_1}\big(x(b)\big),$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0341

e

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \Big[\zeta'(t)^T\gamma(t) + \zeta(t)^T\gamma'(t)\Big]dt + \gamma(a)^T\alpha_0 + \gamma(b)^T\alpha_1 \\
&\leqslant \int_a^b \Big[\Lambda\big(t, y(t), y'(t)\big) - \Lambda\big(t, x(t), x'(t)\big)\Big]dt + \ell_0\big(y(a)\big) - \ell_0\big(x(a)\big) + \ell_1\big(y(b)\big) - \ell_1\big(x(b)\big) \\
&= J(y) - J(x) < 0.
\end{aligned}
$$

3 Conclusões

O interesse no estudo de problemas variacionais não-suaves decorre da abordagem de um contexto mais geral (e complexo) do que aqueles estudados em textos mais comuns de Cálculo das Variações, o caso suave.

Outro tópico de destaque no presente trabalho é a introdução da E-pseudoinvexidade, conceito de convexidade generalizada para problemas variacionais, por meio do qual as condições de transversalidade e de fronteira e a inclusão de Euler são suficientes para otimalidade global.

Agradecimentos

À FAPESP por meio dos processos 2014/24271-6, 2013/07375-0 (CEPID) e 2016/03540-4.

Ao CNPq por meio dos processos 310955/2015-7 e 457785/2014-4.

Referências

[1] M. Arana-Jiménez and R. Osuna-Gómez and G. Ruiz-Garzón and M. Rojas-Medar. On variational problems: Characterization of solutions and duality, *J. Math. Anal. Appl.*, volume 311, pp. 1–12, 2005. DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.12.001.

[2] B. van Brunt. *The Calculus of Variations*. Springer-Verlag New York, Inc., 2004.

[3] F. Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer, London, 2013.

[4] M. A. Hanson. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, volume 80, pp. 545–550, 1981. DOI: 10.1016/0022-247X(81)90123-2.

[5] R. Rojas-Jara. Condições Suficientes de Otimalidade em Cálculo Variacional. Dissertação de Mestrado, UNESP - Câmpus de S. J. do Rio Preto, 2013.

[6] C. A. Signorini. Condições de Otimalidade em Cálculo das Variações no Contexto Não-Suave. Dissertação de Mestrado, UNESP - Câmpus de S. J. do Rio Preto, 2017.

