

Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov Populacional Convencional e Adaptativo Aplicado a Identificação de Danos Estruturais

Josiele da Silva Teixeira ¹

Leonardo Tavares Stutz ²

Diego Campos Knupp ³

Antônio José da Silva Neto ⁴

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brazil

Resumo. O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo referente à aplicação da abordagem Bayesiana como técnica de solução do problema de identificação de danos estruturais. O problema direto é resolvido através do Método de Elementos Finitos (MEF). O problema de identificação de danos é formulado como um problema inverso, cuja solução é uma distribuição de probabilidade *a posteriori* dos parâmetros de coesão da estrutura, obtida utilizando-se a metodologia de amostragem de Monte Carlo com Cadeia de Markov populacional e adaptativo. Um conjunto de resultados numéricos é apresentado, onde considera-se diferentes cenários de danos e um nível de ruído para as duas técnicas de solução adotadas.

Palavras-chave. Identificação de danos, Modelo de dano contínuo, Inferência Bayesiana, Cadeia de Markov

1 Introdução

Garantir a integridade dos mais variados tipos de estruturas na área da engenharia tem sido um dos principais objetivos de muitas pesquisas desenvolvidas pela comunidade técnica e científica nas últimas duas décadas. Tais estruturas estão sujeitas à fatores internos e externos que podem causar mal funcionamento das mesmas e ocasionar situações de grande risco para a sociedade e também gerar grandes prejuízos socioeconômicos. Sendo assim, torna-se imprescindível o desenvolvimento de técnicas de identificação de danos estruturais. O Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC), implementado através do Algoritmo de Metropolis-Hastings, tem sido bastante utilizado para este fim, onde uma distribuição de probabilidade auxiliar da qual seja fácil obter amostras é utilizada [2]. Porém, existem algumas dificuldades em sua aplicação direta, dentre elas destaca-se a dificuldade em percorrer adequadamente o espaço de busca dos parâmetros.

¹josity1@gmail.com

²lstutz@iprj.uerj.br

³diegoknupp@iprj.uerj.br

⁴ajsneto@iprj.uerj.br

Sendo assim, Métodos de Monte Carlo com cadeias de Markov de base populacional (popMCMC) constituem uma alternativa eficaz, pois utilizam conceitos de busca mais eficientes, onde a amostragem é feita de tal forma que se possa evitar que o método fique preso em soluções localmente ótimas [3].

Sabe-se ainda, que a eficiência do algoritmo de Metropolis-Hastings pode ser melhorada via ajuste cuidadoso da distribuição auxiliar proposta. Se adaptação for realizada adequadamente, o algoritmo pode convergir mais rapidamente do que o algoritmo clássico [7]. Em seu trabalho, [5] observou que resultados mais acurados são obtidos quando os parâmetros de interesse são amostrados a partir de distribuições de probabilidade com passos diferenciados. Partindo das perspectivas abordadas anteriormente, para a resolução do problema de identificação de danos será utilizado o Método de Monte Carlo com cadeias de Markov de base populacional modificado via técnica adaptativa direta e em etapa única, cujo o objetivo é diferenciar os passos das distribuições de probabilidade auxiliares do MCMC populacional convencional.

O problema direto é resolvido através do Método de Elementos Finitos (MEF) que, por sua vez, é parametrizado por um parâmetro que mede o estado de coesão da estrutura. O problema inverso é formulado através da atualização dos parâmetros de coesão da estrutura e solucionado através dos os métodos MCMC populacional convencional e adaptativo. Neste trabalho, serão consideradas apenas as incertezas inerentes aos dados medidos, contabilizadas pela função de verossimilhança.

A seção 2 apresenta a formulação do problema direto onde é descrito o parâmetro de coesão e a equação que modela e problema. Na seção 3 tem-se a definição do problema de identificação de danos como solução do problema inverso via inferência Bayesiana, apresentação do MCMC populacional convencional e adaptativo. Na seção 4 apresenta-se um conjunto de resultados numéricos levando-se em conta diferentes cenários de danos e um nível de ruído, adicionados aos dados experimentais. E na seção 5 apresenta-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 Formulação do Problema Direto

A integridade da estrutura é considerada como sendo continuamente descrita, no domínio do corpo, por um parâmetro estrutural denominado parâmetros de coesão $\beta(x)$ [6]. Este parâmetro está relacionado com a ligação entre os pontos materiais e pode ser interpretado como uma medida do estado de coesão local do material. A estrutura escolhida para análise neste trabalho foi uma viga bidimensional de Euler-Bernoulli de aço e simplesmente apoiada.

Considerando que a viga possui uma seção transversal retangular e módulo de elasticidade uniforme, por simplicidade, o campo de coesão pode ser escrito como $\beta(x) = \left(\frac{h(x)}{h_0}\right)^3$, onde $h(x)$ é a espessura em uma posição genérica x e h_0 é a espessura nominal da viga. Se $\beta = 1$, considera-se que todas as ligações entre os pontos materiais foram preservadas, ou seja, não há danos na estrutura. Se $\beta = 0$, uma ruptura local é considerada, já que todas as ligações entre os pontos materiais foram desfeitas.

O Método de Elementos Finitos (MEF) é empregado para obtenção de uma solução

aproximada, fisicamente satisfatória, da equação que modela o problema físico abordado, através do qual obtém-se o seguinte sistema de equações lineares

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

onde \mathbf{u} é o vetor de coordenadas generalizadas, \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{D} é a matriz de amortecimento, $\mathbf{K}(\boldsymbol{\beta})$ é a matriz de rigidez e \mathbf{f} é o vetor de carregamento.

3 Formulação do Problema Inverso

A solução do problema inverso, do ponto de vista Bayesiano, dadas as observações experimentais *a posteriori* \mathbf{Z}_E , é uma função de densidade de probabilidade de $\boldsymbol{\beta}$, que pode ser escrita, de acordo com a fórmula de Bayes, como

$$P_{post}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{Z}_E) = \frac{P(\mathbf{Z}_E|\boldsymbol{\beta})P_{pr}(\boldsymbol{\beta})}{P(\mathbf{Z}_E)}$$

onde $P_{pr}(\boldsymbol{\beta})$ é a distribuição de probabilidade *a priori* do parâmetro de coesão, $P(\mathbf{Z}_E)$ é a densidade marginal e $P(\mathbf{Z}_E|\boldsymbol{\beta})$ é a verossimilhança [4]. Quando a distribuição *a posteriori* não pode ser obtida através de expressão analítica ou simulação numérica, técnicas de amostragem sofisticadas são utilizadas

3.1 Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov Populacional e Adaptativo

De maneira análoga ao MCMC padrão, popMCMC tem como objetivo obter amostras da distribuição a posteriori de interesse $P_{post}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{Z}_E)$, onde uma nova densidade composta *a posteriori* é obtida em função do vetor de parâmetros composto $\boldsymbol{\beta}^{1:N} = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^N)$, como segue [1].

$$P_c(\boldsymbol{\beta}^{1:N}|\mathbf{Z}_E) = \prod_{n=1}^N P_n(\beta^n|\mathbf{Z}_E) \quad (2)$$

onde N é o tamanho da população. No entanto, é condição necessária que uma das distribuições que compõem a densidade composta seja a verdadeira distribuição *a posteriori* de interesse $P_{post}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{Z}_E)$, ou seja, $P_n(\beta^n|\mathbf{Z}_E) = P_{post}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{Z}_E)$ para pelo menos um n . Para que a exploração do espaço de busca dos parâmetros ocorra de maneira eficiente, a sequência de distribuições $P_n(\beta^n|\mathbf{Z}_E)$ deve ser escolhida adequadamente, de modo a facilitar essa exploração. Versões mais suaves da distribuição original são obtidas, com isso ocorre um aumento significativo da probabilidade de transição de regiões com baixas probabilidades para regiões de altas probabilidades, evitando que o método fique preso em ótimos locais, por exemplo. Neste trabalho, o algoritmo foi implementado como segue:

Passo 0: Inicialize a população de cadeias β^1, \dots, β^N ;

Passo 1: Atualize $\beta^n, n = 1, \dots, N$, utilizando o algoritmo de Metropolis-Hastings com uma distribuição irreduzível e aperiódica que admita uma distribuição invariante;

Passo 2: Escolha aleatoriamente dois membros da população, β^u e β^v , com $u, v \in$

1, ..., N.

Passo 3: Faça uma escolha aleatória entre executar os passos 3a ou 3b.

- **Passo 3a.** Execute o movimento de Evolução Diferencial (DE) para β^u e β^v e volte então para o **Passo 1**.
- **Passo 3b.** Execute o movimento de Troca (Swap) entre β^u e β^v e volte então para o **Passo 1**.

Nos **Passos 1, 3a e 3b** os movimentos de troca são aceitos com probabilidades dadas por: $\min(1, r_{MH})$, $\min(1, r_{swap})$ e $\min(1, r_{ED})$, respectivamente, com as razões r_{MH} , r_{ED} e r_{Swap} dadas em [3]

A distribuição auxiliar utilizada neste trabalho é uniforme, centrada em β_{i-1} e com passo D , ou seja, $\beta_i \in [\beta_{i-1} - D, \beta_{i-1} + D]$, onde $i = 1, \dots, Nmcmc$ e $Nmcmc$ é o tamanho da cadeia. Sendo assim, D foi adaptado como segue

$$D_{adp} = \gamma_m(\beta_j - \beta_m)^2 + \gamma_{sd}(\beta_j - \beta_0)^2 \quad (3)$$

onde j é o estado atual da cadeia, β_m é a media dos valores da cadeias até o estado atual e β_0 é o estado inicial das cadeias (estrutura intacta). Como pode visto na Equação 3, a adaptação do passo da distribuição proposta vem, de maneira genérica, da ponderação entre o histórico da cadeia e a diferença do valor atual β_j com o estado inicial β_0 da cadeia. O processo adaptativo se inicia após t_0 iterações das cadeias Markov. Foi adotado o mesmo valor para os parâmetros $\gamma_m = \gamma_{sd} = 0.5$.

4 Resultados

As simulações foram realizadas com uma discretização espacial da viga em 24 elementos do tipo Euler-Bernoulli. A imposição do dano à viga é realizada através de uma redução na altura relativa da seção transversal, nos nós contidos no interior das regiões danificadas. Os dados experimentais são obtidos a partir da resposta impulsiva do sistema, dada pelo MEF, para um valor prescrito de β . O ruído, adicionado aos dados experimentais, é definido indiretamente pela razão sinal ruído, que é dada por $SNR = 10 \log(P_s/P_n)$, onde P_s e P_n correspondem à potência do sinal s e à potência do ruído n , respectivamente. Neste trabalhos utilizou-se apenas um nível de ruído de 30dB para as simulações. Para a obtenção dos dados utilizados no processo de identificação de danos estruturais, considera-se uma excitação impulsiva ou impulso de Dirac em $x = 0,2433m$ e que a resposta impulsiva, em deslocamento, foi medida na mesma posição.

Apesar do MCMC populacional possuir técnicas de amostragem mais eficientes do que a metodologia convencional, ele ainda pode apresentar dificuldades de encontrar uma solução adequada quando trata-se de problemas com altas dimensões, o que ocorre neste trabalho, sendo assim, a adaptação do método torna-se necessária. Com o intuito de exemplificar esse fato, serão apresentadas comparações entre o MCMC populacional convencional e o MCMC populacional adaptado. Um passo constante $d = 0.0005$ é considerado para todas as distribuições auxiliares no MCMC populacional convencional. Já para o MCMC populacional Adaptado o processo de adaptação do passo se inicia após

$t_0 = 20.000$ estados. Utilizou-se uma cadeia de Markov com 100.000 estados e um burn-in de 50.000 para ambas as metodologias abordadas.

Serão adotados 3 cenários de danos, onde o Cenário 1 apresenta um dano na posição $x = 0,5475m$, o Cenário 2 apresenta um dano na posição $1,2775m$ e o Cenário 3 apresenta dois danos nas posições $x = 0,5475m$ e $1,2775m$. Todos os danos impostos apresentam uma altura relativa $h(x)/h_0 = \sqrt[3]{\beta(x)} = 0.9$. A Tabela 1 mostra um resumo dos testes realizados, com as características que são alteradas para cada teste e a seguir são apresentados os resultados da identificação de danos, em termos da altura relativa, para os Casos 1.A a 3.A e 1.B a 3.B.

Tabela 1: Casos considerados.

Caso	Cenário	Método
1.A	1	MCMC populacional
1.B	1	MCMC populacional Adaptativo
2.A	2	MCMC populacional
2.B	2	MCMC populacional Adaptativo
3.A	3	MCMC populacional
3.B	3	MCMC populacional Adaptativo

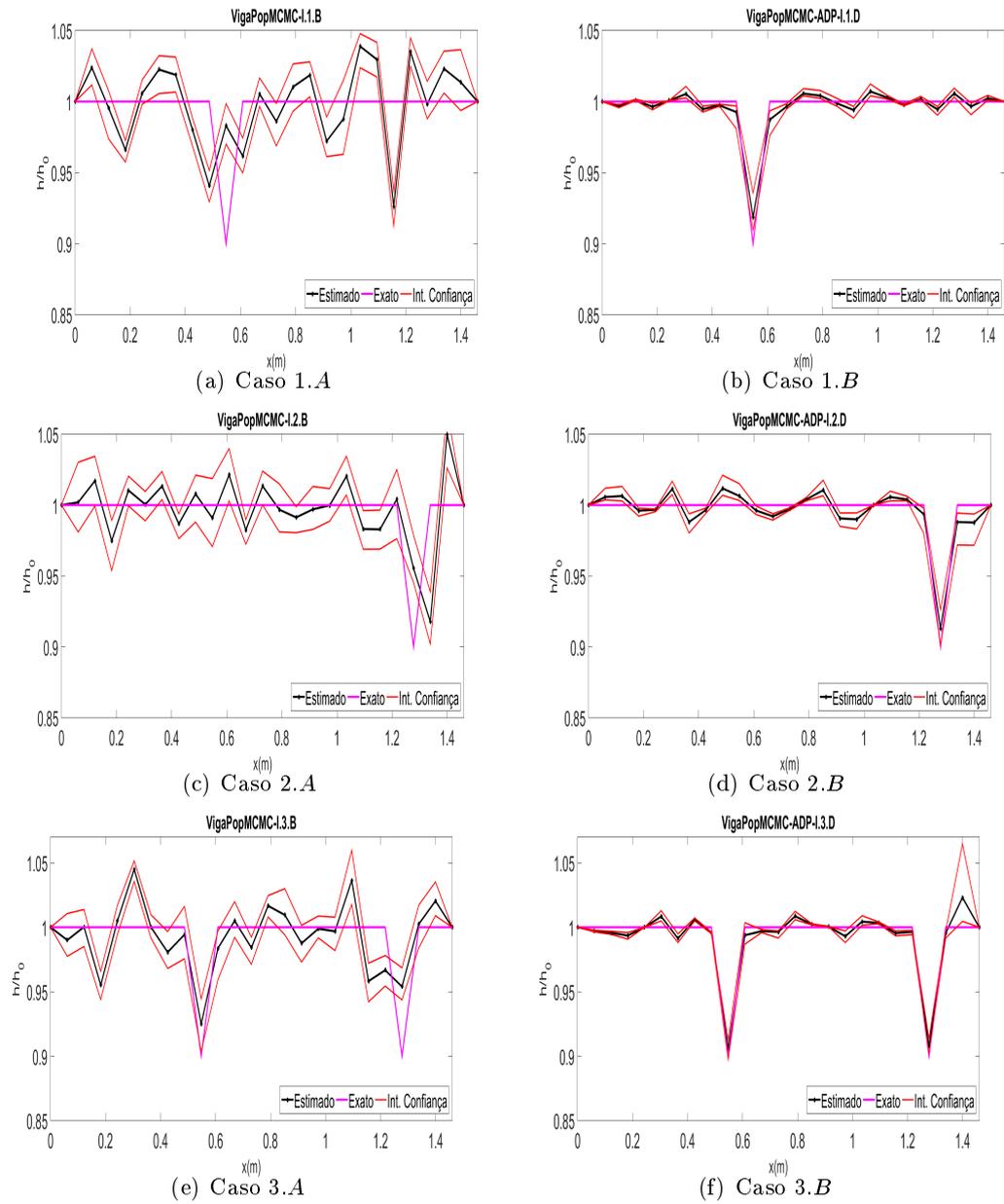
A Tabela 2 apresenta as propriedades estatísticas amostrais das distribuições *a posteriori* do parâmetro de coesão β_{10} , para os casos 1.A, 1.B, 3.A e 3.B, e para o parâmetro de coesão β_{22} , para os casos 2.A, 2.B, 3.A e 3.B. São apresentadas as médias estimadas, os erros relativos (E.R) entre o valor estimado e o valor exato, os desvios padrões (D.P) e as taxas de aceitação (Tx.Ac). O erro relativo é definido como $E_r = \frac{|\beta_{estimado} - \beta_{exato}|}{\beta_{exato}}$

Tabela 2: Propriedades estatísticas.

	Média	D. P	E.R	I. C	Tx.Ac
Caso 1.A	β_{10} 0.807458	0.013099	0.107624	[0.784628; 0.836723]	80%
Caso 1.B	β_{10} 0.774656	0.018775	0.062628	[0.752822; 0.819333]	54%
Caso 2.A	β_{22} 0.871808	0.023384	0.195895	[0.844793; 0.937258]	85%
Caso 2.B	β_{22} 0.760702	0.017890	0.043486	[0.732824; 0.794286]	42%
Caso 3.A	β_{10} 0.790951	0.034605	0.084980	[0.737947; 0.842048]	86%
	β_{22} 0.868011	0.016637	0.190687	[0.840132; 0.908607]	
Caso 3.B	β_{10} 0.742793	0.009970	0.018920	[0.722599; 0.759234]	34%
	β_{22} 0.749005	0.007991	0.027441	[0.733975; 0.763806]	

A Figura 1 apresenta os campos de dano exato e estimado, além do intervalo com um grau de confiança de 95%, obtidos para os casos estudados, onde podemos observar que para os três cenários de danos, o MCMC populacional convencional não foi capaz de localizar e quantificar adequadamente os danos existentes na estrutura, ao passo que o MCMC populacional Adaptativo logrou êxito em ambos aspectos para o três cenários de danos adotados, demonstrando assim sua eficácia em relação ao método convencional.

Figura 1: Resultado da identificação de danos



A Figura 1 corrobora com dados apresentados na Tabela 2, onde podemos observar que o método MCMC populacional adaptativo apresentou melhores resultado em relação ao MCMC populacional convencional, com médias mais próximas do valor exato e consequentemente erros relativos menores, além de apresentar ainda boas taxas de aceitação e intervalos de confiança menores.

5 Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo principal a aplicação da abordagem Bayesiana na identificação de danos estruturais. A solução do problema inverso de estimação, foi obtida pelos Métodos de Monte Carlo com cadeias de Markov populacional convencional e Adaptativo, para três cenários de danos. Os dados experimentais foram corrompidos com um nível de ruído significativo (30dB). Observou-se que o método MCMC populacional adaptativo, nas condições adotadas neste trabalho, obteve resultados mais acurados em relação ao método MCMC populacional convencional, conseguindo localizar e quantificar acuradamente os danos existentes na estrutura. Como sugestões para trabalhos futuros propõe-se a utilização de técnicas de regularização para diminuir as oscilações dos valores relativos as regiões não danificadas da estrutura.

Os autores agradecem aos órgãos de fomento à pesquisa: Faperj, Capes e CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] A. Jasra, D. A. Stephens, C. C. Holmes. On population-based simulation for static inference, *Stat Comput*, 17:263-279, 2007.
- [2] D. M. Malakoff. Bayes Offers New Way to Make Sense of Numbers, *Science*, 268:1460-1464, 1999.
- [3] J. M. Nichols, E.Z. Moore, K.D. Murphy. Bayesian identification of a cracked plate using a population-based Markov Chain Monte Carlo method, *Computers and Structures*, 89:1323-1332, 2011.
- [4] J. P. Kaipio, E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [5] J. S. Teixeira, L.T. Stutz, D. C. Knupp, A. J. Silva Neto. Structural damage identification via time domain response and Markov Chain Monte Carlo method, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 24:1-27, 2016.
- [6] L. T. Stutz, D. A. Castello, F. A. Rochinha. A flexibility-based continuum damage identification approach, *Journal of Sound and Vibration*, 279:641-6672, 2005.
- [7] S. Brooks, A. Gelman, G. L. Jones, X. L. Meng. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*. Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2011.