Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVII CNMAC, S.J. dos Campos - SP, 2017.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins

Thiago de Souza Pinto[1]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR
Luís Fernando Costa Alberto[2]
Departamento de Engenharia Elétrica, EESC - USP, São Carlos, SP
Michele Cristina Valentino[3]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

Resumo. Neste trabalho, apresentamos uma extensão do princípio de invariância de LaSalle para uma classe de sistemas chaveados contínuos não lineares, a saber, sistemas chaveados afins. Este resultado permite estudar, usando uma função auxiliar comum, o comportamento assintótico de soluções "dwell-time" do sistema chaveado afim sob chaveamento arbitrário. A extensão do princípio de invariância é útil para obter estimativas de conjuntos atratores de sistemas chaveados afins. Esta utilidade é ilustrada em aplicações deste princípio na obtenção de estimativas do atrator em um exemplo de sistemas dinâmicos de segunda ordem.

Palavras-chave. Princípio de invariância de LaSalle, Sistemas chaveados contínuos Afins, conjuntos atratores, área de atração.

1 Introdução

Nas últimas décadas, tem-se observado um crescente interesse da comunidade científica no estudo do problema de estabilidade e estabilização de sistemas chaveados. Estes problemas surgem em muitas aplicações de engenharia tais como: controle de sistemas mecânicos, controle de processos, sistemas de potência, controle de aeronaves, indústria automotiva, eletrônica de potência e muitos outros campos [8]. De modo geral, o sistema chaveado é um sistema dinâmico que consiste de uma família de subsistemas (ou modos) e uma lei de chaveamento que seleciona a cada instante de tempo qual subsistema deve ser ativado [7].

Apesar de importantes avanços na teoria de estabilidade, os atratores de diversos sistemas chaveados podem não ser um ponto de equilíbrio, como por exemplo o sistema de controle de temperatura liga-desliga. Então, para essa classe de problemas, o interesse não é estudar a estabilidade de um ponto de equilíbrio particular, mas o comportamento assintótico das soluções. Uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico das soluções de sistemas dinâmicos é o Princípio de Invariância de LaSalle. Este resultado foi primeiramente desenvolvido para equações diferenciais ordinárias

[1]thiagosp@uftpr.edu.br
[2]lfcalberto@usp.br
[3]valentino@utfpr.edu.br

autônomas definidas em espaço de dimensão finita [6] e depois o resultado foi estendido para outras classes de sistemas dinâmicos incluindo equações diferenciais funcionais [4], sistemas descontínuos [2] e sistemas chaveados [3, 5, 9, 12].

O princípio de invariância de LaSalle utiliza uma função auxiliar, comumente denominada função de Lyapunov, para analisar o comportamento assintótico das soluções de um sistema, sem a necessidade de conhecer explicitamente as soluções das equações diferenciais. Uma propriedade fundamental dessa função é a não-positividade de sua derivada ao longo das soluções. Encontrar tal função, satisfazendo todas as suposições do princípio de invariância, pode ser difícil para muitos sistemas dinâmicos. Portanto, uma extensão do princípio de invariância, a qual permite que a derivada da função auxiliar possa ser positiva em alguns conjuntos limitados, foi proposta para sistemas contínuos em [11], para sistemas discretos em [1], para sistemas com atraso em [10] e para sistemas chaveados não lineares em [12].

Neste trabalho, uma extensão do princípio de invariância para a classe de sistemas chaveados afins sob chaveamento dwell-time arbitrários é desenvolvido. Esta extensão teve como motivação os resultados obtidos em [12] e [3].

2 Preliminares

No presente trabalho, é analisado o comportamento assintótico das soluções de uma classe de sistemas chaveados contínuos no tempo através de uma lei de chaveamento *dwell-time*. Mais especificamente, estuda-se a classe de sistemas chaveados afins definidas por

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

em que $\sigma(t) : [0, \infty[\to \mathcal{P}$ é uma função constante por partes, chamada de lei de chaveamento dwell-time, $\mathcal{P}$ é um conjunto finito de números inteiros positivos, ou seja, $\mathcal{P} = \{1, \cdots, \mathcal{N}\}$ e $\mathcal{N}$ é o número de subsistemas. Seja $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de tempos de chaveamento associada a lei de chaveamento dwell-time σ, então $\forall k \in \mathbb{N}$ tem se que $\tau_{k+1} - \tau_k \geq T_{dwell}$, com $T_{dwell} > 0$ chamado tempo de permanência do sinal de chaveamento $\sigma(t)$. Considere $I_p = \{t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) : \sigma(\tau_k) = p, k \in \mathbb{N}\}$ sendo a união dos intervalos em que o subsistema p é ativo. Uma função contínua, suave por partes, $x(t) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema chaveado afim (1) no intervalo $\mathcal{I}$ se $x(t)$ satisfaz $\dot{x}(t) = A_p x(t) + b_p$, $\forall t \in I_p \cap \mathcal{I}$ para todo p. O conjunto de todas as soluções com chaveamento dwell-time é denotada por $\mathcal{S}_{dwell}$. Denota-se $\varphi_{\sigma(.)}(t, x_0)$, ou simplesmente $\varphi(t, x_0)$, a solução de (1) com condição inicial x_0 no tempo $t = 0$ através da lei de chaveamento dwell-time $\sigma(t)$.

Para fácil compreensão do resultado principal, algumas definições preliminares, as quais podem ser encontradas em [7] e [3], são apresentadas.

Definição 2.1. *Um conjunto compacto $\mathcal{M}$ é fracamente invariante com respeito ao sistema chaveado* (1) *se para cada $x_0 \in \mathcal{M}$ existe um índice $p \in \mathcal{P}$, uma solução $\varphi(t, x_0)$ do campo vetorial $f_p(x(t))$ e um número real $c > 0$ tal que $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{M}$ para qualquer $t \in [-c, 0]$ ou $t \in [0, c]$.*

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0452

A solução $\varphi(t, x_0)$ é atraída para o conjunto $\mathcal{M}$, ou seja, $\varphi(t, x_0) \to \mathcal{M}$ se, e somente se, $\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t, x_0), \mathcal{M}) = 0$, onde d é a distância de um ponto ao conjunto que pode ser definida, se adotarmos a norma Euclidiana, por $d(y, \mathcal{M}) = \inf_{m\in\mathcal{M}} \|y - m\|_2$.

Definição 2.2. *Um ponto q é um ponto limite da solução $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$ se existe uma sequência $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, com $t_k \to +\infty$, quando $k \to +\infty$ tal que $\lim_{k\to+\infty} \varphi_{\sigma(t)}(t_k, x_0) = q$. O conjunto de todos os pontos limites de $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$ será denotado por $\omega^+[\varphi_\sigma(t, x_0)]$.*

Na definição anterior é importante observar que o conjunto ω-limite depende não apenas do ponto inicial x_0 mas também da sequência de chaveamento que está sendo utilizada.

3 Extensão do princípio de invariância

O objetivo dessa seção é analisar, usando uma função auxiliar, o comportamento assintótico das soluções da classe de sistemas chaveados afins contínuos no tempo sob chaveamentos dwell-time arbitrários.

Suponha a existência de uma função auxiliar comum $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para o sistema (1) dada por

$$V(x) = (x - d)'P(x - d), \quad \text{onde} \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

e considere que

$$\exists \;\; P > 0 \quad \text{satisfazendo} \quad Q_p = A_p'P + PA_p < 0, \;\; \forall p \in \mathcal{P}. \tag{3}$$

Defina os seguintes conjuntos: $C_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V(x)(A_p x + b_p) \geq 0\}$ o conjunto dos pontos onde a derivada da função V ao longo da trajetória do subsistema p é positiva ou nula e $\Omega_v = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq v, \text{ onde } v \in \mathbb{R}\}$ um conjunto de nível da função V. Seja $C = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} C_p$ e utilize as notações $\lambda_{\min}(\cdot)$ e $\lambda_{\max}(\cdot)$ para denotar o menor e maior autovalor de uma matriz real.

O Lema 3.1, a seguir, fornece condição suficiente para que o conjunto C seja limitado e oferece uma estimativa deste conjunto na forma de um conjunto de nível da função V.

Lema 3.1. *Considere o sistema chaveado afim* (1) *e a função escalar* (2) *tal que* (3) *seja satisfeita. Então o conjunto C é limitado e existe um número real*

$$\ell > \lambda_{\max}(P)\,(z + \|d\|)^2\,, \tag{4}$$

com $z = \max_{p\in\mathcal{P}} \left\{ -\dfrac{\mu_p + \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)} \right\}$, *sendo* $\mu_p = \left\| b_p'P - d'PA_p \right\|$ *e* $\xi_p = |d'Pb_p|$, *que garante a inclusão* $C \subset \Omega_\ell$.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0452

Demonstração. A derivada da função V ao longo da solução do subsistema p é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) = \nabla V(x)(A_p x + b_p) &= x'Q_p x + 2(b_p'P - d'PA_p)x - 2d'Pb_p \\ &\leq x'Q_p x + 2\left\|b_p'P - d'PA_p\right\|\|x\| + 2\left|d'Pb_p\right| \\ &\leq x'\lambda_{\max}(Q_p)x + 2\left\|b_p'P - d'PA_p\right\|\|x\| + 2\left|d'Pb_p\right| \\ &= \lambda_{\max}(Q_p)x'x + 2\left\|b_p'P - d'PA_p\right\|\|x\| + 2\left|d'Pb_p\right| \\ &= \lambda_{\max}(Q_p)\|x\|^2 + 2\mu_p\|x\| + 2\xi_p,\end{aligned}$$

onde $\mu_p = \left\|b_p'P - d'PA_p\right\|$ e $\xi_p = \left|d'Pb_p\right|$. Desse modo, concluímos que

$$\dot{V}(x) \leq \lambda_{\max}(Q_p)\|x\|^2 + 2\mu_p\|x\| + 2\xi_p. \tag{5}$$

Uma vez que (3) é satisfeita para todo $p \in \mathcal{P}$, então $\lambda_{max}(Q_p) < 0$. Logo, de (5), pode-se concluir que a derivada é estritamente negativa quando:

$$\|x\| < \frac{-\mu_p + \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)} \quad \text{ou} \quad \|x\| > \frac{-\mu_p - \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)}.$$

Observando que $\dfrac{-\mu_p + \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)} < 0$, obtemos que

$$C_p \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x\| \leq -\frac{\mu_p + \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)}\right\}.$$

Assim

$$C = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} C_p \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x\| \leq z\}, \text{ onde } z = \max_{p\in\mathcal{P}}\left\{-\frac{\mu_p + \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)}\right\}.$$

Então o conjunto C é limitado. Agora, analisando os valores numéricos que a função auxiliar comum V assume quando $x \in C$, obtém-se

$$\begin{aligned}V(x) &\leq \lambda_{\max}(P)\,(x-d)'\,(x-d) \\ &< \lambda_{\max}(P)\,\|x-d\|^2 \\ &= \lambda_{\max}(P)\,(\|x\| + \|d\|)^2 \\ &\leq \lambda_{\max}(P)\,(z + \|d\|)^2.\end{aligned}$$

Portanto tomando $\ell \in \mathbb{R}$ tal que

$$\ell > \lambda_{\max}(P)\,(z + \|d\|)^2, \tag{6}$$

conclui-se que $C \subset \Omega_\ell$.

O próximo lema garante a existência de um conjunto positivamente invariante para sistemas chaveados afins sob chaveamentos dwell-time arbitrários. Ele é uma versão particularizada do Lema 1, apresentado em [12], para a classe de sistemas afins.

Lema 3.2. *Considere o sistema chaveado afim* (1) *e a função escalar* (2) *tal que* (3) *seja satisfeita. Seja* ℓ *um número real satisfazendo* (4). *Se* $x_0 \in \Omega_\ell = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \ell\}$ *então, toda solução* $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ *permanece dentro de* Ω_ℓ *para todo* $t \geq 0$.

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ uma solução do sistema (1) sob um chaveamento arbitrário. Suponha que exista $\tau > 0$ tal que $\varphi(\tau, x_0) \notin \Omega_\ell$. Então, pela continuidade de V e $\varphi(t, x_0)$, existe $\bar{\tau} \in (0, \tau)$ tal que $V(\varphi(\bar{\tau}, x_0)) = \ell$ e $V(\varphi(t, x_0)) > \ell$, $\forall t \in (\bar{\tau}, \tau]$. Assim, V deverá crescer fora de Ω_ℓ, o que é absurdo uma vez que provamos no Lema 3.1 que fixado $\ell > \lambda_{\max}(P)\,(z + \|d\|)^2$ tem-se $C \subset \Omega_\ell$. Portanto, uma vez que qualquer conjunto de nível da V é limitado, então a solução $\varphi(t, x_0) \in S_{dwell}$ pertence a Ω_ℓ para todo $t \geq 0$.

Observação 3.1. *No Lema 1 em [12], exige-se que a solução* $\varphi(t, x_0)$ *seja limitada. No Lema 3.2, a limitação é automaticamente garantida pela limitação de* Ω_ℓ*, que vem do fato da matriz* P *ser definida positiva.*

Explorando o Lema 3.1 e Lema 3.2, a seguinte extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins utilizando uma função auxiliar comum é estabelecida.

Teorema 3.1. *Considere o sistema chaveado afim* (1) *e a função escalar* (2) *tal que* (3) *seja satisfeita. Então, toda solução* $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ *é atraída para um conjunto fracamente invariante em* Ω_ℓ*, onde* ℓ *é dado por* (4).

Demonstração. Inicialmente, considere $x_0 \in \Omega_\ell$, então pelo Lema 3.2 temos que toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ permanece dentro de Ω_ℓ para todo $t \geq 0$, ou seja, a solução $\varphi(t, x_0) \in S_{dwell}$ é limitada. Logo, pela Proposição 2 do trabalho [3], tem-se que a solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ será atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ.

Agora, considere $x_0 \notin \Omega_\ell$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$. Como $\ell > \sup_{x \in C} V(x)$ tem-se $\partial\Omega_\ell \cap C = \emptyset$, isto é, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\sup_{x \in \Omega_\ell^c} \dot{V}_p(x) \leq -\varepsilon < 0$, $\forall p \in \mathcal{P}$. Logo $V(\varphi(t, x_0))$ é estritamente decrescente, então existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\bar{t}, x_0) \in \Omega_\ell$. Desse modo, pelo Lema 3.2 a solução $\varphi(t, x_0) \in \Omega_\ell$ para todo $t \geq \bar{t}$. Assim, a conclusão segue da primeira parte desta demonstração.

Portanto, a solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ.

4 Exemplo numérico

O Teorema 3.1 será explorado para obter estimativa do conjunto atrator do sistema chaveado afim (1) com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ e $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $b_1 = [1 \quad 2]'$ e $b_2 = [-1 \quad 0]'$. Com esta finalidade considere a função auxiliar (2), onde tomamos uma matriz $P = \begin{bmatrix} 0.1428 & -0.0685 \\ -0.0685 & 0.1471 \end{bmatrix}$ que satisfaz (3) e o vetor $d = [0.2509 \quad -0.3470]'$. O Lema 3.1 garante que $C \subset \Omega_\ell$ quando $\ell > 0.9999$. Assim, pelo Teorema 3.1, toda solução

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0452

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

$\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_ℓ, isto é, o atrator deste sistema chaveado afim sob chaveamento arbitrário está contido no elipsoide Ω_ℓ. A Figura 1 ilustra a simulação no domínio do tempo para a condição inicial $x_0 = [-3 \;\; 4]'$ e $\tau_{k+1} = \tau_k + 1$, $k = 1, \ldots, 50$.

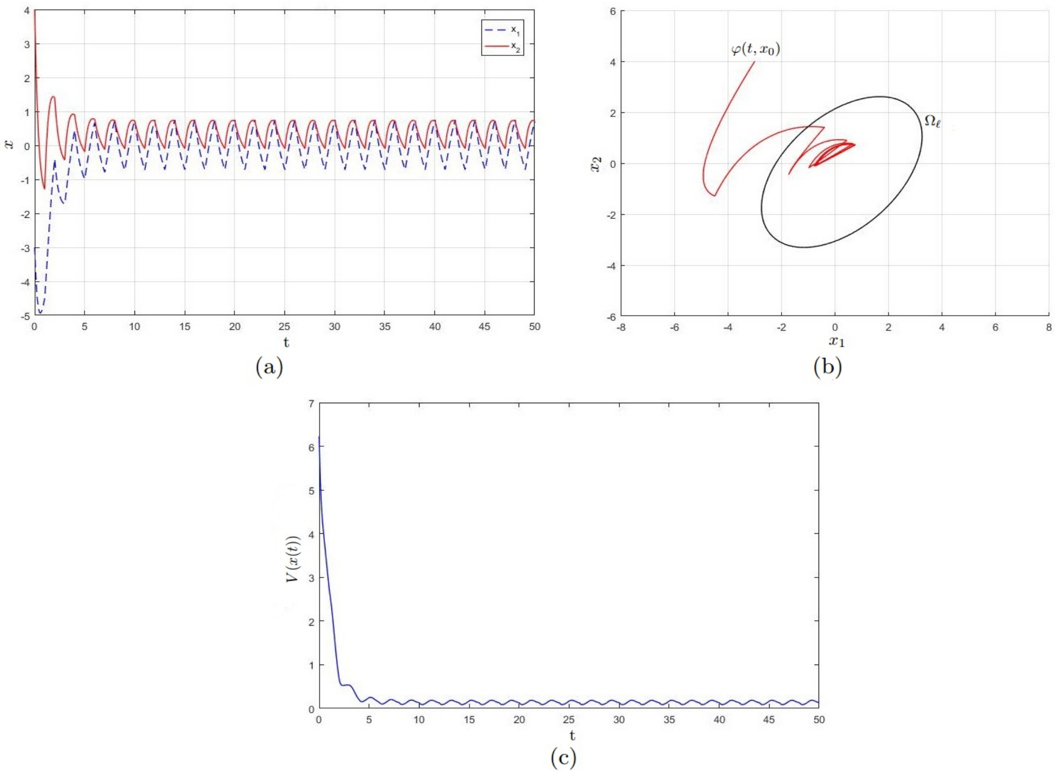

Figura 1: (a) Solução chaveada com condição inicial $x_0 = [-3 \;\; 4]'$, (b) plano de fase e (c) gráfico da função auxiliar V.

5 Conclusões

Neste trabalho, uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins foi demonstrada. Conforme pode ser observado no exemplo numérico, este resultado é útil para obter estimativas de conjuntos atratores e de áreas de atração de sistemas chaveados afins. Ao analisar o Lema 3.1 concluímos que as estimativas obtidas dependem do valor escolhido para o número real ℓ, ou seja, depende da matriz $P > 0$ e do vetor d que determinam a desigualdade (4). No intuito de melhorar as estimativas obtidas para o conjunto atrator e área de atração de sistemas chaveados afins, atualmente estamos buscando encontrar alguma ferramenta matemática que forneça uma maneira sistemática de se obter a matriz P e o vetor d.

DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0452

Referências

[1] L.F.C. Alberto, T.R. Calliero, and A.C.P. Martins. An invariance principle for nonlinear discrete autonomous dynamical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(4):692–697, 2007.

[2] A. Bacciotti and F. Ceragioli. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth lyapunov functions. *ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations 4*, 1999.

[3] A. Bacciotti and L. Mazzi. An invariance principle for nonlinear switched systems. *Systems & Control Letters*, 54(11):1109 – 1119, 2005.

[4] J.K. Hale and H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 1991.

[5] J.P. Hespanha. Uniform stability of switched linear systems: extensions of lasalle's invariance principle. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(4):470–482, 2004.

[6] J. LaSalle. Some extensions of liapunov's second method. *Circuit Theory, IRE Transactions on*, 7(4):520–527, Dec 1960.

[7] Daniel Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser Basel, 2003.

[8] Hai Lin and P.J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(2):308–322, Feb 2009.

[9] J.L. Mancilla-Aguilar and R.A. Garcia. An extension of lasalle's invariance principle for switched systems. *Systems & Control Letters*, 55(5):376 – 384, 2006.

[10] Marcos Rabelo and LFC Alberto. An extension of the invariance principle for a class of differential equations with finite delay. *Advances in Difference Equations*, 2010(1):496936, 2010.

[11] H.M. Rodrigues, L.F.C. Alberto, and N.G. Bretas. On the invariance principle: generalizations and applications to synchronization. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 47(5):730–739, 2000.

[12] M.C. Valentino, V.A. Oliveira, L.F.C. Alberto, and D.S. Azevedo. An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 61(4):580 – 586, 2012.

