

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Efeitos de Ruídos sobre a Formação de Padrões em um Sistema Presa-Predador Discreto

Joice Chaves Marques<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - PPGMap, UFRGS, Porto Alegre, RS

Diomar Cristina Mistro<sup>2</sup>

Departamento de Matemática, UFSM, Santa Maria, RS

Horst Malchow<sup>3</sup>

Institute of Environmental Systems Research School of Mathematics, Universität Osnabrück, Osnabrück, Germany

**Resumo.** A formação de padrões de Turing em dinâmica de populações se caracteriza pela desestabilização do estado de equilíbrio homogêneo causada pela movimentação por difusão dos indivíduos, o que leva a uma distribuição espacial heterogênea das espécies. Consideramos um sistema presa-predador espacialmente estruturado em Redes de Mapas Acoplados (RMA) em que as presas são afetadas por um Efeito Allee. Como o crescimento populacional pode estar sujeito a variações estocásticas, introduzimos um ruído demográfico branco, dependente da densidade, na população de presas e analisamos, através de simulações numéricas, seus efeitos sobre a formação de padrões espaço-temporais das espécies. Encontramos diferentes resultados dependendo dos parâmetros da dinâmica e de movimentação. De maneira geral, observamos que os padrões obtidos para parâmetros na região em que o equilíbrio de coexistência é instável são mantidos para amplitudes suficientemente pequenas do ruído.

**Palavras-chave.** Formação de padrões, Ruído, RMA e Dinâmica Populacional.

## 1 Introdução

O matemático inglês Alan Turing, em seu trabalho de 1952, sugeriu que, sob certas condições, dois químicos que reagem e difundem podem produzir padrões espaciais heterogêneos da concentração dos químicos. Suas ideias levaram a um enorme número de trabalhos ilustrando a, então chamada, instabilidade difusiva de Turing em diversos tipos de sistemas [3].

Em 1972, Segel e Jackson [11] aplicaram as ideias de Turing à dinâmica de populações e apresentaram condições sob as quais um sistema presa-predador pode apresentar distribuições espaciais heterogêneas das espécies. De fato, muitos ecologistas teóricos têm

---

<sup>1</sup>joicec.marques@hotmail.com

<sup>2</sup>dcmistro@gmail.com

<sup>3</sup>horst.malchow@uni-osnabrueck.de

ênfatisado que para compreender a estabilidade e diversidade dos ecossistemas é fundamental conhecer os processos de auto-organização através dos quais, as espécies assumem uma distribuição espacial heterogênea. Mesmo em ambientes onde as condições são homogêneas é possível ocorrer alternância de áreas com alta densidade populacional e áreas onde a espécie é praticamente ausente.

No entanto, a dinâmica das populações está sujeita a perturbações estocásticas demográficas e/ou ambientais. Um surto de doença em um determinado período causando a mortalidade de muitos indivíduos da espécie, fatores climáticos extremos, decréscimo na taxa de natalidade, dentre outros são exemplos de tais flutuações.

Muitos autores têm se dedicado a estudar os efeitos de ruídos sobre a dinâmica populacional. Os resultados variam de acordo com o modelo e com o tipo de ruído. O tipo de função de crescimento (Ricker, Beverton-Holt, etc) bem como o parâmetro afetado pelo ruído (taxa de crescimento ou capacidade de suporte) podem produzir resultados diferentes. Além disso, ruídos correlacionados ou não correlacionados (cor do ruído) também podem influenciar os resultados [7, 10].

Nesse trabalho vamos propor um modelo presa-predador discreto espacialmente estruturado para analisar os efeitos de ruído demográfico branco dependente da densidade sobre a formação de padrões heterogêneos das populações. O modelo será descrito via Rede de Mapas Acoplados (RMA) e considera Efeito Allee para as presas e predador especialista.

## 2 Formulação do modelo

Equações a diferenças do tipo  $N_{t+1} = f(N_t)$  e equações diferenciais  $\frac{dN}{dt} = f(N)$  pertencem a uma classe de modelos chamados **determinísticos**. Isto significa que se o estado do sistema for conhecido para um certo tempo  $t$ , então é possível determinar todos os estados futuros resolvendo-se a equação correspondente. No entanto, em algumas situações, efeitos **estocásticos** são importantes e podem ser relevantes para a persistência das espécies.

De acordo com Mendez [4] o ruído pode ser interpretado como um conjunto de variáveis aleatórias colocado em algum tipo de ordem específica. Vamos chamar de “ruído” as variações aleatórias que podem provir de diferentes mecanismos e afetar vários aspectos da dinâmica populacional. Assim, para caracterizar o ruído é necessário estabelecer a função densidade de probabilidade (f.d.p.) que fornece as informações estocásticas que caracterizam a variável aleatória em questão.

A estocasticidade e, portanto, o ruído, pode ser classificada de acordo com o processo biológico que está sujeito a flutuações e da correlação que apresenta com relação ao tempo. De acordo com Melbourne e Hastings [5], estocasticidade pode ser dividida em duas grandes categorias: estocasticidade demográfica e estocasticidade ambiental.

Estocasticidade demográfica está relacionada à probabilidade natural de nascimentos e mortes dos indivíduos. Variações em fatores externos ao ambiente como temperatura, nível de precipitação, entre outros são fontes de estocasticidade ambiental e podem afetar as taxas de natalidade e mortalidade de uma população.

Os ruídos podem ainda ser classificados quanto a auto correlação, o que se estabeleceu como sendo a cor do ruído [10]. Quando os valores do ruído não apresentam nenhuma

relação com resultados anteriores, ou seja, são independentes, classificamos como ruído branco que em dinâmica de populações está relacionado à estocasticidade demográfica uma vez que as flutuações sofridas pelos indivíduos não têm correlação.

Brännström e Sumpter [2] propõem que o modelo estocástico análogo ao modelo discreto de crescimento de uma população

$$n_{t+1} = n_t g(n_t)$$

seja da forma

$$n_{t+1} = n_t g(n_t) \exp \left[ \zeta \varepsilon_t - \frac{\zeta^2 \sigma^2}{2} \right] \tag{1}$$

onde  $\varepsilon_t$  é uma variável aleatória distribuída de acordo com a normal com média 0 e variância  $\sigma$  e  $\zeta$  é a intensidade do ruído. O fator  $\exp[-\frac{\zeta^2 \sigma^2}{2}]$  garante que a média da exponencial do ruído seja 1.

### 2.0.1 Modelo proposto

Neste trabalho usamos o modelo presa-predador com Efeito Allee forte para as presas proposto por [8] a partir do qual modelamos flutuações estocásticas introduzindo um ruído branco com amplitude dependente da densidade na taxa de crescimento da população de presas .

Propomos a seguinte dinâmica local

$$\begin{cases} N_{t+1} &= \exp [\exp[-\gamma N_t] \xi_{t+1} - 0,5 \exp[-2\gamma N_t]] \frac{r(N_t)^2}{1+b(N_t)^2} \exp[-P_t] \\ P_{t+1} &= N_t P_t \end{cases} \tag{2}$$

onde  $\xi_t$  é uma variável aleatória distribuída de acordo com a distribuição normal com média 0 e variância 1. A amplitude do ruído é dada por  $\exp[-\gamma N_t]$ , onde  $\gamma$  é o fator de decaimento. Observamos que a amplitude decresce com a densidade da população.

Consideramos uma população de presas e predadores que interagem de acordo com a dinâmica com ruído (2) e estão espacialmente distribuídas de modo que a etapa de movimentação é descrita pelas equações

$$N'_{x,y,t} = (1 - \mu_N) N_{x,y,t} + \sum_{(\hat{x}, \hat{y}) \in V_{x,y}} \frac{\mu_N}{4} N_{\hat{x}, \hat{y}, t} \tag{3}$$

$$P'_{x,y,t} = (1 - \mu_P) P_{x,y,t} + \sum_{(\hat{x}, \hat{y}) \in V_{x,y}} \frac{\mu_P}{4} P_{\hat{x}, \hat{y}, t} \tag{4}$$

onde  $N_{x,y,t}$  e  $P_{x,y,t}$  são as densidades de presas e predadores, respectivamente, no sítio  $(x, y)$  no início da geração  $t$ ,  $N'_{x,y,t}$  e  $P'_{x,y,t}$  as densidades depois da dispersão. Os coeficientes de dispersão  $\mu_N$  e  $\mu_P$  correspondentes à fração da população de presas e predadores, respectivamente, que migra para os quatro sítios vizinhos, isto é,  $V_{x,y} = \{(x - 1, y), (x + 1, y), (x, y - 1), (x, y + 1)\}$ .

E as equações da etapa de reação dadas por

$$\begin{cases} N_{x,y,t+1} &= \exp [\exp[-\gamma N_{x,y,t}] \xi_{x,y,t+1} - \exp[-2\gamma N_{x,y,t}]] \frac{rN_{x,y,t}^2}{1+bN_{x,y,t}^2} \exp[-P_{x,y,t}] \\ P_{x,y,t+1} &= N_{x,y,t} P_{x,y,t} \end{cases} \tag{5}$$

### 3 Simulações Numéricas

Para cada conjunto de valores  $r$ ,  $b$ ,  $\mu_N$  e  $\mu_P$ , simulamos o modelo (3)-(5) em um domínio  $50 \times 50$  para três valores de  $\gamma$  correspondentes a um risco de extinção baixo ( $r_e = 0,01$ ), médio ( $r_e = 0,3$ ) e alto ( $r_e = 0,95$ ). Os valores de  $r$  e  $b$  foram escolhidos de modo a satisfazer as condições de estabilidade [1] para o equilíbrio de coexistência do modelo determinístico (ver detalhes sobre a dinâmica determinística em [9]).

Utilizamos valores de  $\mu_N$  e  $\mu_P$  de forma a satisfazer as condições de instabilidade difusiva em Rede de Mapas Acoplados(RMA) obtidas em [8]. Desta forma o modelo determinístico apresenta padrões espaciais estáveis para a distribuição de presas e predadores.

A distribuição inicial de presas e predadores consiste de uma perturbação aleatória em torno do valor do equilíbrio, em cada sítio do domínio. Isto é,

$$N_{x,y,0} = (1 + 0,1\varepsilon_{x,y})N^*,$$

$$P_{x,y,0} = (1 + 0,1\delta_{x,y})P^*,$$

onde  $\varepsilon_{x,y}$  e  $\delta_{x,y}$  são números pseudo-aleatórios.

Uma vez escolhidos os valores  $r$ ,  $b$ ,  $\mu_N$ ,  $\mu_P$  e  $\gamma$ , implementamos o modelo (3)-(5) para dez seqüências diferentes de ruído. Para cada conjunto de parâmetros  $r$ ,  $b$ ,  $\mu_N$ ,  $\mu_P$  e  $\gamma$ , calculamos a média da população total em cada tempo, das dez simulações diferentes realizadas.

Apresentamos os resultados em dois tipos de gráficos:

(a) Densidade no reticulado em que as diferentes cores correspondem a densidades populacionais distintas (conforme escala);

(b) Séries temporais da densidade populacional total que são apresentadas em diferentes cores: Cores cinza, preta e vermelha. As curvas cinzas (ao todo dez) representam séries temporais da população total resultantes de diferentes realizações do modelo. A cor preta representa a média dos valores das curvas cinzas e a cor vermelha, a dinâmica sem ruído, isto é, determinística; Cores rosa, verde e azul representam médias de dez realizações porém cada cor representa um valor diferente de  $\gamma$ .

Por questão de brevidade apresentamos os resultados para um conjunto de parâmetros.

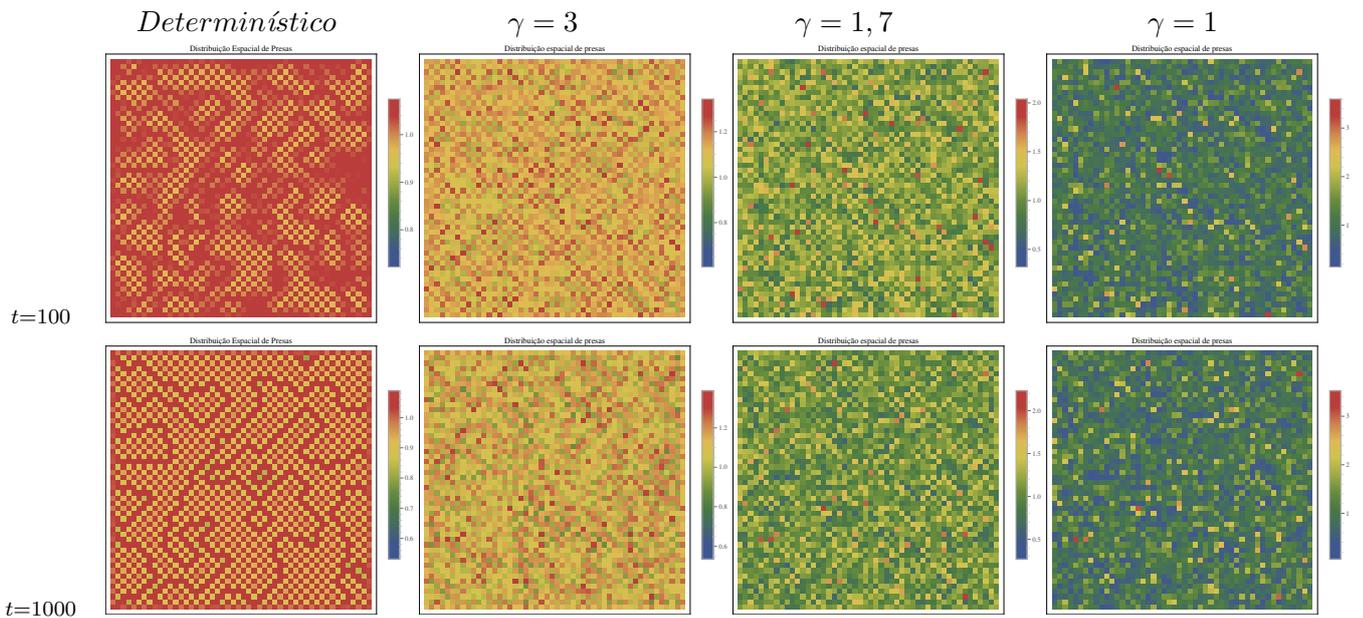


Figura 1: Distribuição espacial de presas para  $r = 8$ ,  $b = 6$ ,  $\mu_N = 0,87$  e  $\mu_P = 0,01$  e diferentes valores de  $\gamma$ .

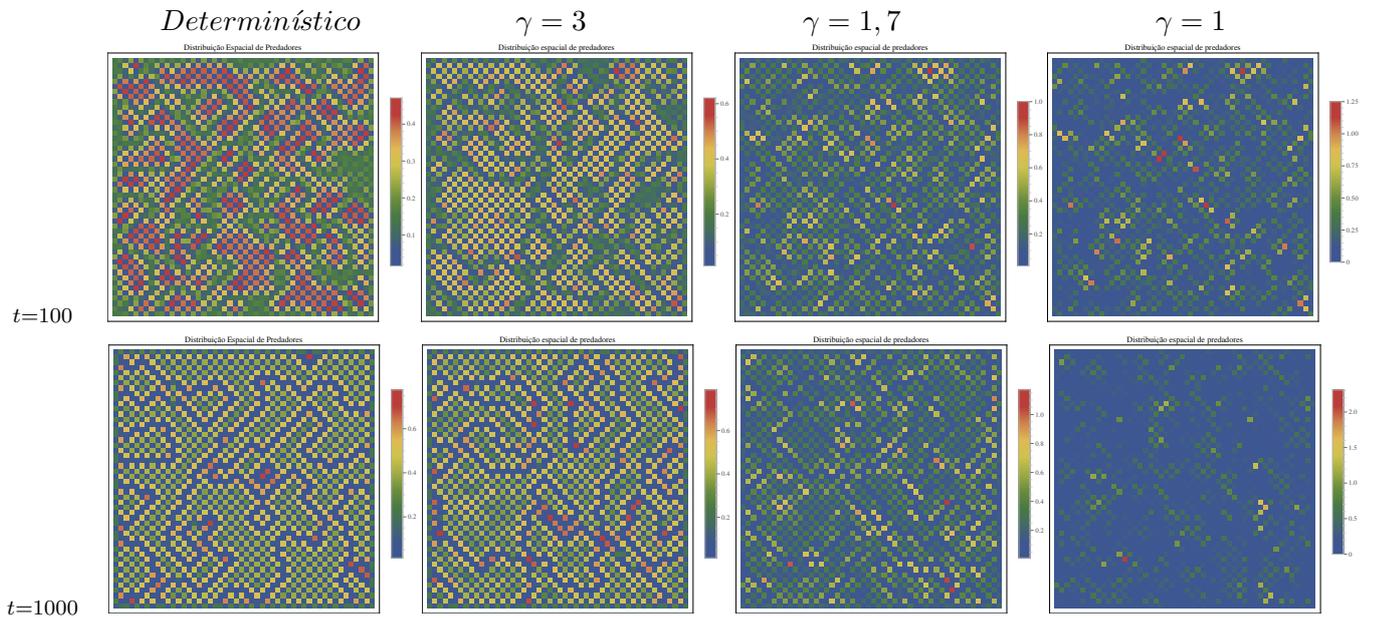


Figura 2: Distribuição espacial de predadores para  $r = 8$ ,  $b = 6$ ,  $\mu_N = 0,87$  e  $\mu_P = 0,01$  e diferentes valores de  $\gamma$ .

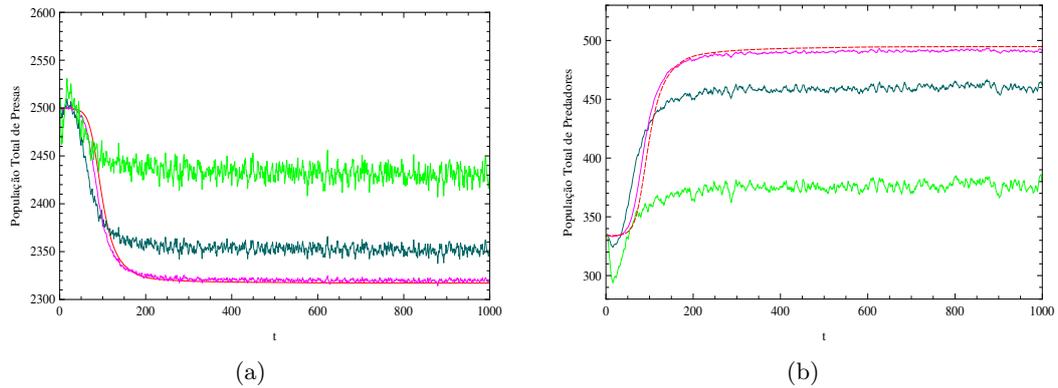


Figura 3: (a) Média da população total de presas, (b) Média da população total de predadores para  $r = 8$ ,  $b = 6$ ,  $\mu_N = 0,87$ ,  $\mu_P = 0,01$  e três valores de  $\gamma$ :  $\gamma = 3$  (cor rosa),  $\gamma = 1,7$  (cor azul) e  $\gamma = 1$  (verde). A curva em vermelho corresponde ao resultado do modelo determinístico.

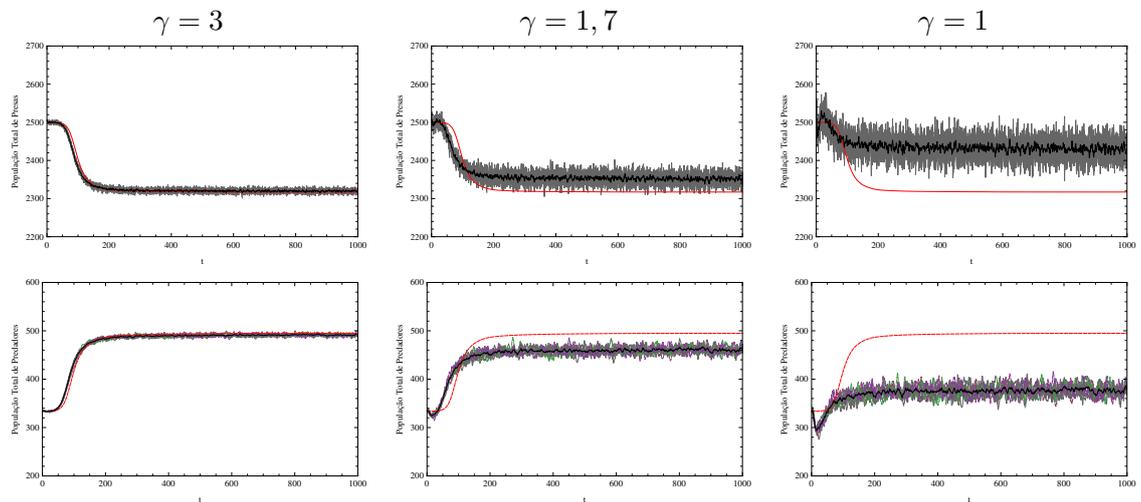


Figura 4: População total de presas nos painéis superiores e de predadores nos inferiores, para parâmetros  $r = 8$ ,  $b = 6$ ,  $\mu_N = 0,87$  e  $\mu_P = 0,01$  e diferentes valores de  $\gamma$ . As curvas em cinza representam as realizações para diferentes sequências de ruídos. A cor preta representa a média em cada tempo e a cor vermelha o resultado do modelo determinístico.

## 4 Conclusões

Nossos resultados mostram que os efeitos do ruído demográfico com amplitude dependente da densidade para o modelo espacialmente estruturado proposto, dependem da região onde foram considerados os parâmetros de reação e os coeficientes de dispersão. Por exemplo, para  $r = 8$  e  $b = 6$  e coeficientes de movimentação na região de Turing, a população de presas mostrou-se mais sensível aos efeitos do ruído pois os padrões espaço-temporais antes observados na dinâmica determinística não foram preservados (Figura 1). Além disso não houve surgimento de novos padrões, independente da amplitude do ruído.

do. As distribuições espaço-temporais de predadores, por outro lado, apresentam padrões muito parecidos aos do modelo determinístico para ruídos de baixa intensidade (Figura 2). À medida que a intensidade do ruído aumenta, a densidade total de presas assume valores maiores em comparação à dinâmica sem ruído. A densidade total de predadores, por sua vez, assume valores maiores do que aqueles obtidos com a dinâmica determinística. Para  $\gamma = 3$  ambas as densidades totais, de presas e predadores, são muito próximas da dinâmica determinística (Figura 4).

## Referências

- [1] L. J. S. Allen. *An Introduction to mathematical biology*. Pearson Prentice Hall, 2007.
- [2] A. Brännström and D. J. T. Sumpter. Stochastic analogues of deterministic single-species population models, *Theoretical Population Biology*, 69:442-451, 2006.
- [3] H. Malchow, S. V. Petrovskii and E. Venturino. *Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulations*. London: Chapman & Hall/CRC Press, 2008.
- [4] V. Mendez, D. Campos and F. Bartumeus. *Stochastic Foundations in Movement Ecology. Anomalous Diffusion, Front Propagation and Random Searches*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [5] B. A. Melbourne and A. Hastings. Extinction risk depends strongly on factors contributing to stochasticity, *Nature*, 454:100-103, 2008.
- [6] D. C. Mistro, L.A.D. Rodrigues and M. C. Varriale. The role of spacial refuges in coupled map lattice model for host-parasitoid systems, *Bulletin of Mathematical Biology*, 71:1934-1953, 2009.
- [7] J. M. Morales. Viability in a pink environment: why “white noise” models can be dangerous, *Ecology Letters*, 2:228-232, 1999.
- [8] L. A. D. Rodrigues, D. C. Mistro and S. Petrovskii. Pattern formation, long-term transients, and the Turing-Hopf bifurcation in a space and time-discrete predator-prey system, *Bull Math Biol*, 73(8):1812-1840, 2011.
- [9] L. A. D. Rodrigues, D. C. Mistro and S. Petrovskii. Pattern formation in a space and time discrete predator-prey system with strong Allee effect, *Theoretical Ecology*, 5:341-362, 2012.
- [10] J. Ripa and P. Lundberg. Noise colour and the risk of population extinctions, *Proc. R. Soc. Lond. B*, 263:1751-1753, 1996.
- [11] L. A. Segel and J. L. Jackson. Dissipative structure: An explanation and an ecological example, *J. Theor. Biol.*, 37:545-559, 1972.