

Bifurcações do Tipo Hopf da Região de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Autônomos Não Lineares

Josaphat R. R. Gouveia Jr.¹

Colegiado de Matemática, IFBA, Eunápolis, BA

Fabiolo Moraes Amaral²

Colegiado de Matemática, IFBA, Eunápolis, BA

Luís Fernando C. Alberto³

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, EESC, USP, São Carlos, SP

Resumo. Exploraremos o comportamento da região de estabilidade de sistemas dinâmicos sujeitos a variações de parâmetros na vizinhança de um ponto de equilíbrio Hopf do tipo- k com $k \geq 1$ é estudado neste artigo. O comportamento da região de estabilidade bem como da sua fronteira quando o sistema está próximo a um parâmetro de bifurcação Hopf do tipo- k com $k \geq 1$ na fronteira da região de estabilidade é investigado. Uma caracterização global da fronteira da região de estabilidade na vizinhança de um valor de bifurcação Hopf do tipo- k com $k \geq 1$ é apresentado neste artigo.

Palavras-chave. Região de Estabilidade, Fronteira de Estabilidade, Bifurcação Hopf Supercrítica, Bifurcação Hopf Subcrítica.

1 Introdução

As caracterizações existentes da fronteira da região de estabilidade, [4] e [1], são fornecidas sob algumas suposições sobre o campo vetorial, incluindo a hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade e condições de transversalidade.

Neste artigo, estamos interessados em estudar caracterizações da região de estabilidade e de sua fronteira quando o sistema está sujeito a variação de parâmetros. Sob variação de parâmetros, bifurcações locais podem ocorrer na fronteira da região de estabilidade e a suposição de hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio pode ser violada nos pontos de bifurcações. Logo, estudar a caracterização da fronteira da região de estabilidade em pontos de bifurcações é de fundamental importância para entender como a região de estabilidade se comporta sob variação de parâmetros.

Alguns avanços nesta direção já foram obtidos e relatados na literatura. Em [8], por exemplo, uma completa caracterização da fronteira da região de estabilidade na presença de pontos de equilíbrio sela-nó do tipo- k , com $k \geq 0$ e uma completa caracterização

¹josaphat@ifba.edu.br

²fabiolo@ifba.edu.br

³lfcAlberto@usp.br

de bifurcações da região de estabilidade induzida por essas bifurcações foram estudadas. Em [6], a caracterização da fronteira da região de estabilidade na presença de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos do tipo Hopf foram desenvolvidas como o primeiro passo para entender o comportamento da região de estabilidade na ocorrência de bifurcações locais do tipo Hopf na fronteira da região de estabilidade.

O comportamento da fronteira da região de estabilidade a variações de parâmetros na vizinhança de um ponto de equilíbrio Hopf do tipo- k com $k \geq 1$ e uma caracterização global da fronteira da região de estabilidade próximo a um parâmetro de bifurcação Hopf do tipo- k com $k \geq 1$ é desenvolvida nesse artigo. Essa caracterização é o primeiro passo na busca de estimativas ótimas da região de estabilidade na ocorrência de bifurcação de Hopf supercrítica do tipo- k , com $k \geq 1$ na fronteira da região de estabilidade.

Este artigo é organizado da seguinte maneira. Na Seção 2, uma revisão da caracterização da fronteira da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares é apresentada. A principal contribuição deste artigo é apresentada na Seção 3. A seção 4 exibimos exemplos que ilustram a teoria desenvolvida na seção anterior e a Seção 5 às considerações finais.

2 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade

Consideremos o sistema dinâmico autônomo não linear:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial suave. O ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (1) se $f(x^*) = 0$. Um ponto de equilíbrio x^* de (1) é dito ser *hiperbólico* se todos os autovalores da matriz Jacobiana $D_x f(x^*)$ não têm parte real nula. Além disso, um ponto de equilíbrio hiperbólico x^* é do *tipo- k* se a matriz Jacobiana possui k autovalores com parte real positiva e $n - k$ autovalores com parte real negativa.

Suponha que x^s seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema (1). A *região de estabilidade* (ou região de atração) de x^s é o conjunto $A(x^s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(t, x) \rightarrow x^s \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$. A região de estabilidade $A(x^s)$ é um conjunto aberto e invariante. Seu fecho $\overline{A(x^s)}$ é invariante e a *fronteira da região de estabilidade* $\partial A(x^s)$ é um conjunto fechado e invariante.

Com o intuito de compreender melhor a fronteira da região de estabilidade e obter melhores estimativas da região de estabilidade, foram desenvolvidas caracterizações da fronteira da região de estabilidade.

Uma caracterização completa da fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x^s do sistema (1) foi desenvolvida em [4] sob as seguintes hipóteses: **(B1)** Todos os elementos críticos em $\partial A(x^s)$ são hiperbólicos; **(B2)** As variedades estável e instável dos elementos críticos em $\partial A(x^s)$ satisfazem a condição de transversalidade; e **(B3)** Trajetórias em $\partial A(x^s)$ aproximam-se de um dos seus elementos crítico quando $t \rightarrow \infty$.

A fronteira da região de estabilidade de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x^s do sistema (1), satisfazendo as hipóteses **(B1)**, **(B2)** e **(B3)**, é a união das variedades

estáveis de todos elementos críticos na fronteira $\partial A(x^s) = \bigcup_i W^s(\psi_i)$, onde $\psi_i, i = 1, 2, \dots$ são os elementos críticos hiperbólicos na fronteira da região de estabilidade $\partial A(x^s)$.

As hipóteses **(B1)** e **(B2)** são propriedades genéricas de sistemas dinâmicos na forma de (1), veja [5]. Condições suficientes para a verificação da hipótese **(B3)** foram dadas em [4].

Neste artigo, exploraremos o comportamento da fronteira da região de estabilidade da classe de sistemas dinâmicos autônomo dependente de um parâmetro

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{2}$$

onde $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe \mathcal{C}^1 .

O Teorema da Função Implícita garante a persistência dos pontos de equilíbrio hiperbólicos $x_{\mu_0}^i, i = 1, \dots, k$, e do ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável $x_{\mu_0}^s$ sob pequenas variações do parâmetro μ . Ou seja, para valores de μ próximos a μ_0 , continuam existindo pontos de equilíbrio hiperbólicos perturbados $x_{\mu_*}^i, i = 1, \dots, k$, na vizinhança dos pontos de equilíbrio hiperbólicos $x_{\mu_0}^i, i = 1, \dots, k$, e um único ponto de equilíbrio assintoticamente estável perturbado x_{μ}^s próximo a $x_{\mu_0}^s$. Para estudarmos o comportamento da fronteira da região de estabilidade na presença de um ponto de equilíbrio Hopf, relaxaremos a hipótese **(B1)**, ou seja, a hipótese de que todos os pontos de equilíbrio na fronteira são hiperbólicos. Em [3], o Teorema 9.1.3 garante a persistência dos elementos críticos na fronteira da região de estabilidade admitindo a existência de pontos de equilíbrio Hopf na fronteira.

Em [7], foi apresentado uma caracterização da fronteira da região de estabilidade sob a variação de parâmetros para um caso particular de violação da afirmação (B1), isto é, quando um ponto de equilíbrio não hiperbólico do tipo Hopf está na fronteira da região de estabilidade. Neste artigo, estudamos uma caracterização global da fronteira da região de estabilidade sob a variação de parâmetros quando pontos de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo- k , com $k \geq 1$ está na fronteira da região de estabilidade.

3 Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade na Vizinhança de valor de parâmetro de bifurcação Hopf do tipo- k

Nesta seção, uma caracterização da fronteira da região de estabilidade numa vizinhança pequena do parâmetro μ próxima ao parâmetro μ_0 de bifurcação Hopf do tipo- k , com $k \geq 1$, é apresentada. Iniciamos a seção com alguns conceitos da teoria de bifurcação do tipo Hopf.

Um ponto de equilíbrio não hiperbólico $x_{\mu_0} \in \mathbb{R}^n$ de (2), para um parâmetro fixo $\mu = \mu_0$, é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf e (x_{μ_0}, μ_0) um ponto de bifurcação de Hopf se as seguintes condições forem satisfeitas: (i) $D_x f(x_{\mu_0})$ tem um par simples de autovalores imaginários puros, $\pm i\omega$, e nenhum outro autovalor com parte real nula; e (ii) $l_1 \neq 0$, onde l_1 é o Primeiro Coeficiente de Lyapunov, veja [6].

Pontos de equilíbrio de Hopf ou pontos de bifurcações de Hopf podem ser classificados de acordo com o sinal do primeiro coeficiente de Lyapunov. Um ponto de equilíbrio de

Hopf $x_{\mu_0} \in \mathbb{R}^n$ de (2) é chamado um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico se o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1 < 0$ e é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf subcrítico se o primeiro coeficiente de Lyapunov $l_1 > 0$.

Pontos de equilíbrio de Hopf podem também ser classificados em tipos de acordo com o número de autovalores de $D_x f(x_{\mu_0})$ com parte real positiva. Um ponto de equilíbrio de Hopf x_{μ_0} de (2) é chamado um ponto de equilíbrio de Hopf do tipo- k se $D_x f(x_{\mu_0})$ tem k ($k \leq n - 2$) autovalores com parte real positiva e $n - k - 2$ com parte real negativa.

Teorema 3.1 (Teorema da Bifurcação de Hopf). [?, 2] *Considere o sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, com f suave, tendo para todo $|\mu - \mu_0|$ suficientemente pequeno, o equilíbrio x_{μ_0} com autovalores complexos $\lambda_{1,2}(\mu) = \sigma(\mu) \pm i\omega(\mu)$ onde $\gamma(\mu_0) = 0$, $\omega(\mu_0) = \omega > 0$, e os demais autovalores com partes reais diferentes de zero. Se as seguintes condições são satisfeitas **(a)** $l_1(\mu_0) \neq 0$ (Condição de não degenerescência) e **(b)** $\sigma'(\mu_0) \neq 0$ (Condição de Transversalidade). Então, introduzindo uma variável complexa, aplicada a transformações de coordenadas suaves e inversíveis que dependem suavemente do parâmetro μ , o sistema pode ser reduzido à seguinte forma complexa restrita à variedade central, $\dot{z} = (\beta + i)z + sz|z|^2 + O(|z|^4)$ com $s = \text{senal}(l_1(\mu_0)) = \text{senal}(\Re(c_1(\mu_0)))$. Além disso, existe uma vizinhança U de x_{μ_0} e $\epsilon > 0$ tal que:*

(i) *se $l_1(\mu_0) < 0$, então existe um ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- k , com $1 \leq k \leq n - 2$, em U para todo $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$ e uma órbita fechada hiperbólica Ω_{μ}^H do tipo- k , com $1 \leq k \leq n - 2$, e um ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- $k + 2$, com $1 \leq k \leq n - 2$, em U para todo $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \epsilon)$. Além disso, a variedade instável do ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- $(k + 2)$ intercepta a variedade estável da órbita periódica hiperbólica Ω_{μ}^H do tipo- k ao longo de uma variedade bidimensional.*

(ii) *se $l_1(\mu_0) > 0$, então existe uma órbita fechada hiperbólica Ω_{μ}^H do tipo- $(k + 1)$, com $1 \leq k \leq n - 2$, e um ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- k , com $1 \leq k \leq n - 2$, em U para todo $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$ e um ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- $(k + 2)$, com $1 \leq k \leq n - 2$, em U para todo $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \epsilon)$. Além disso, a variedade estável do ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- k intercepta a variedade instável da órbita periódica hiperbólica Ω_{μ}^H do tipo- $(k + 1)$ ao longo de uma variedade bidimensional para todo $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$.*

Sejam $x_{\mu_0}^s$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (2) e $A_{\mu_0}(x_{\mu_0}^s)$ sua região de estabilidade para um parâmetro fixo $\mu = \mu_0$. Considere as seguintes afirmações: **(B1')** Todos os elementos críticos em $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}^s)$ são elementos críticos hiperbólicos ou pontos de equilíbrio Hopf supercríticos; **(B2')** As variedades estáveis, centro-estáveis e/ou centrais e as variedades instáveis dos elementos críticos em $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}^s)$ satisfazem segundo a condição de transversalidade definida neste capítulo.

O próximo resultado estabelece o comportamento da fronteira da região de estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio Hopf Supercrítico do tipo- k com $k \geq 1$.

Teorema 3.2. *(Comportamento da fronteira da região de estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio Hopf Supercrítico do tipo- k com $k \geq 1$) Seja (μ_0, x_{μ_0}) um ponto de bifurcação Hopf supercrítico do tipo- k , $k \geq 1$, de (2) para $\mu = \mu_0$. Suponha que o ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo- k x_{μ_0} pertença à fronteira da*

região de estabilidade $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}^s)$ de um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável $x_{\mu_0}^s$ de (2) para $\mu = \mu_0$. Admita que as suposições (B1), (B2) e (B3) sejam satisfeitas para todo μ pertencente a um intervalo aberto I contendo $\mu = \mu_0$, exceto em μ_0 onde as condições (B1') e (B2') são satisfeitas. Além disso, assuma que x_{μ_0} seja o único ponto de equilíbrio não hiperbólico em $\mu = \mu_0$. Suponha também, que para todo $\mu \in I$, todos os elementos críticos do sistema perturbado $\dot{x} = f(x, \mu)$ sejam elementos críticos perturbados originados do sistema $\dot{x} = f(x, \mu_0)$. Então existe uma vizinhança de x_{μ_0} e $\epsilon_1 \geq \epsilon > 0$ tal que:

(i) Existe um ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- k , com $1 \leq k \leq n - 2$, em U para todo $\mu \in (\mu_0 - \epsilon_1, \mu_0)$ e uma órbita fechada hiperbólica Ω_{μ}^H do tipo- k , com $1 \leq k \leq n - 2$, e um ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- $k + 2$, com $1 \leq k \leq n - 2$, em U para todo $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \epsilon_1)$.

(ii) Para $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \epsilon)$ temos que $\Omega_{\mu}^H \in \partial A_{\mu}(x_{\mu}^s)$ e $x_{\mu}^H \in \partial A_{\mu}(x_{\mu}^s)$.

(iii) Para $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$ temos que $x_{\mu}^H \in \partial A_{\mu}(x_{\mu}^s)$.

Observe do Teorema 3.2 que para $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$, o ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- k , com $1 \leq k \leq n - 2$, na vizinhança em U pertence à fronteira da região de estabilidade de x_{μ}^s . Em $\mu = \mu_0$, o ponto de equilíbrio perde a hiperbolicidade em U , ocasionando o surgimento do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo- k , com $k \geq 1$. O ponto de equilíbrio Hopf supercrítico está na fronteira da região de estabilidade de x_{μ}^s . Para valores de $\mu > \mu_0$, o ponto de equilíbrio hiperbólico x_{μ}^H do tipo- $k + 2$, com $1 \leq k \leq n - 2$ em U perde estabilidade e surge uma órbita fechada hiperbólica Ω_{μ}^H do tipo- $(k + 1)$, com $1 \leq k \leq n - 2$, em U na fronteira da região de estabilidade de x_{μ}^s . O Teorema 3.2 estabelece que tanto a região de estabilidade quanto a fronteira da região de estabilidade sofrem mudanças quando o parâmetro varia no intervalo $(\mu_0 - \epsilon, \mu_0 + \epsilon)$. O próximo resultado estabelece a caracterização da fronteira da região de estabilidade numa vizinhança pequena do valor de parâmetro de bifurcação Hopf supercrítico do tipo- k , com $k \geq 1$.

Proposição 3.1. (Caracterização da fronteira da região de estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio Hopf Supercrítico do tipo- k com $k \geq 1$) Seja (μ_0, x_{μ_0}) um ponto de bifurcação Hopf supercrítico do tipo- k , $k \geq 1$, de (2) para $\mu = \mu_0$. Suponha que o ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo- k x_{μ_0} pertença à fronteira da região de estabilidade $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}^s)$ de um ponto de equilíbrio hiperbólico assintoticamente estável $x_{\mu_0}^s$ de (2) para $\mu = \mu_0$. Admita que as suposições (B1), (B2) e (B3) sejam satisfeitas para todo μ pertencente a um intervalo aberto I contendo $\mu = \mu_0$, exceto em μ_0 onde as condições (B1') e (B2') são satisfeitas. Além disso, assuma que x_{μ_0} seja o único ponto de equilíbrio não hiperbólico em $\mu = \mu_0$. Suponha também, que para todo $\mu \in I$, todos os elementos críticos do sistema perturbado $\dot{x} = f(x, \mu)$ sejam elementos críticos perturbados originados do sistema $\dot{x} = f(x, \mu_0)$. Se $r_{\mu_0}^i$ são os elementos críticos em $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}^s)$, $i = 1, \dots, k$, então:

(i) Para $\mu = \mu_0$ temos $\partial A_{\mu_0}(x_{\mu_0}^s) = \bigcup_i W_{\mu_0}^s(r_{\mu_0}^i) \bigcup_j W_{\mu_0}^c(x_{\mu_0})$.

(ii) Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\mu \in (\mu_0 - \epsilon, \mu_0)$, $\partial A_{\mu}(x_{\mu}^s) = \bigcup_i W_{\mu}^s(r_{\mu}^i) \bigcup W_{\mu}^s(x_{\mu}^H)$ onde r_{μ}^i , $i = 1, 2, \dots, k$ são os elementos críticos hiperbólicos perturbados em $\partial A_{\mu}(x_{\mu}^s)$

e x_μ^H é o ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo- k , com $1 \leq k \leq n - 2$, originado da bifurcação Hopf supercrítico do tipo- k , $k \geq 1$.

(iii) Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\mu \in (\mu_0, \mu_0 + \epsilon)$, $\partial A_\mu(x_\mu^s) = \bigcup_i W_\mu^s(r_\mu^i) \cup W_\mu^s(x_\mu^H) \cup W_\mu^s(\Omega_\mu^H)$ onde r_μ^i , $i = 1, 2, \dots, k$ são os elementos críticos hiperbólicos perturbados em $\partial A_\mu(x_\mu^s)$ e x_μ^H e Ω_μ^H são o ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo- $(k+2)$, com $1 \leq k \leq n-2$, e a órbita periódica do tipo- k , com $1 \leq k \leq n-2$, respectivamente, originados da bifurcação Hopf supercrítica do tipo- k , $k \geq 1$.

4 Exemplos

Considere o sistema dinâmico autônomo não-linear extraído de [6] $\dot{x} = (-z + \mu)x - y - x(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = (-z + \mu)y + x - y(x^2 + y^2)$ e $\dot{z} = -0.1(z + 0.5(x^2 + y^2))(z - 3)(8 - z)$, onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Para $\mu_0 = 0$, o sistema possui três pontos de equilíbrio, são eles: o ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1, $x_1 = (0, 0, 8)$, o ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-1, $x_{\mu_0}^H = (0, 0, 0)$, e um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, $x_\mu^s = (0, 0, 3)$. A fronteira da região de estabilidade de $x_{\mu_0}^s = (0, 0, 3)$ é formada pela união da variedade estável do ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1 $x_1 = (0, 0, 8)$ com a variedade central do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-1 $x_{\mu_0}^H = (0, 0, 0)$, ver Figura 1(a). Para $\mu = -0.5$, o sistema possui três pontos de equilíbrio, são eles: dois pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo-1, $x_\mu^H = (0, 0, 0)$ e $x_1 = (0, 0, 8)$, e um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, $x_\mu^s = (0, 0, 3)$. O ponto de equilíbrio x_μ^H é originado do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-1 em uma bifurcação Hopf supercrítica do tipo-1. Os pontos de equilíbrio hiperbólicos $x_\mu^H = (0, 0, 0)$ e $x_1 = (0, 0, 8)$ pertencem à fronteira da região de estabilidade $\partial A_\mu(x_\mu^s)$, de acordo com o Teorema 3.2, ver Figura 1(b). Para $\mu = 0.5$, o sistema possui quatro elementos críticos, são eles: um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-3, $x_\mu^H = (0, 0, 0)$, um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1, $x_1 = (0, 0, 8)$, um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, $x_\mu^s = (0, 0, 3)$, e uma órbita periódica hiperbólico do tipo-1 ϕ_μ^H . Os elementos críticos x_μ^H e ϕ_μ^H foram originados do ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo-zero em uma bifurcação Hopf supercrítica do tipo-zero. Os pontos de equilíbrio hiperbólicos x_1 e ϕ_μ^H pertencem à fronteira da região de estabilidade $\partial A_\mu(x_\mu^s)$, de acordo com o Teorema 3.2, ver Figura 1(c).

5 Conclusões

Neste artigo estudamos o comportamento da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares sob a variação de parâmetros. Inicialmente, apresentamos um resultado que descreve o comportamento local da fronteira região de estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio Hopf supercrítico do tipo- k , com $k \geq 1$. Uma caracterização global da fronteira da região de estabilidade na vizinhança de um valor de parâmetro de bifurcação Hopf supercrítica do tipo- k , com $k \geq 1$ também foi apresentada. Exibimos um exemplo para verificar os resultados apresentados.

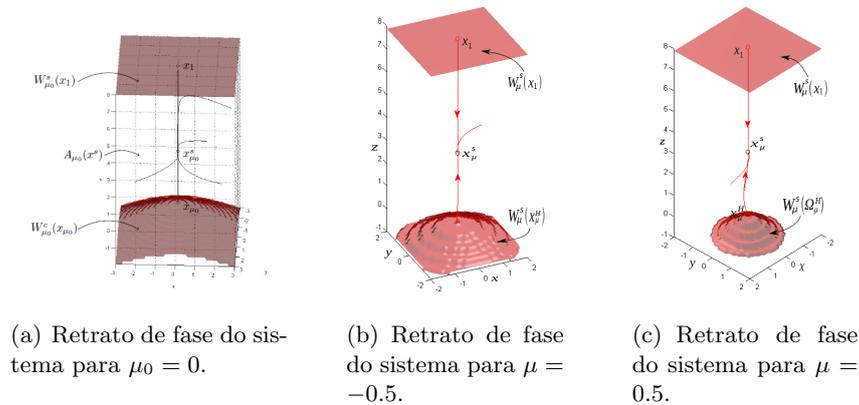


Figura 1: 1(a) A fronteira da região de estabilidade de $x_{\mu_0}^s = (0, 0, 3)$ é formada pela união da variedade estável $W_{\mu_0}^s(x_1)$ com a variedade central $W_{\mu_0}^c(x_{\mu_0})$. 1(b) A fronteira da região de estabilidade de $x_{\mu}^s = (0, 0, 3)$ é formada pela união da variedade estável $W_{\mu}^s(x_1)$ com a variedade estável $W_{\mu}^s(x_{\mu}^H)$. 1(c) A fronteira da região de estabilidade de $x_{\mu}^s = (0, 0, 3)$ é formada pela união da variedade estável $W_{\mu}^s(x_1)$ com a variedade estável $W_{\mu}^s(\phi_{\mu}^H)$.

Referências

- [1] F. M. Amaral and L. F. C. Alberto, Bifurcações sela-nó da região de estabilidade de sistemas dinâmicos autônomos não lineares, *TEMA*, volume 17, pages 71-80, 2016.
- [2] H. D. Chiang, M. W. Hirsch and F. F. Wu, Stability region of nonlinear autonomous dynamical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33:16–27, 1988.
- [3] H. D. Chiang and L. F. C. Alberto. *Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems: Theory, Estimation, and Applications*, Cambridge University Press, 2015.
- [4] J. R. R. Gouveia Jr., and F. M. Amaral and L. F. C. Alberto, Stability boundary characterization of nonlinear autonomous dynamical systems in the presence of a supercritical Hopf equilibrium point, *IJBC*, volume 23, number 12, pages 1350196-1, 2014.
- [5] J. R. R. Gouveia Jr., *Bifurcações da Região de Estabilidade Induzidas por Bifurcações Locais do Tipo Hopf*, Tese de Doutorado, USP, 2015.
- [6] J. R. R. Gouveia Jr., and F. M. Amaral and L. F. C. Alberto, Pontos de Equilíbrio Hopf Subcríticos na Fronteira da Região de Estabilidade, *III CMAC-SE*, volume 3, number 2, 2015.
- [7] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1995.
- [8] J. Palis. On Morse-Smale dynamical systems. *Topology*, volume 8, pages 385–405, 1969.