

Identificação de Danos Estruturais utilizando o Modelo de Superfície de Resposta e o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov

Isabela Cristina da Silveira e Silva Rangel¹

Diego Campos Knupp²

Leonardo Tavares Stutz³

Luciano dos Santos Rangel⁴

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, RJ

Resumo. O presente trabalho aborda o problema de identificação de danos em vigas a partir de um Modelo de Superfície de Resposta (MSR) da matriz de flexibilidade estrutural. O dano é descrito por um parâmetro de coesão, discretizado espacialmente pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). O problema inverso é formulado segundo a abordagem Bayesiana, de modo que a solução do problema consiste na determinação de densidades de probabilidade marginais *a posteriori* dos parâmetros nodais de coesão. O método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC) foi utilizado para a obtenção das densidades de probabilidade. Diante dos resultados obtidos, pode-se concluir que a abordagem proposta foi capaz de identificar com acurácia os campos de dano considerados.

Palavras-chave. Identificação de Danos, Matriz de Flexibilidade, Superfície de Resposta, Inferência Bayesiana, Cadeias de Markov.

1 Introdução

Nos últimos anos, o problema de identificação de danos estruturais tem despertado o interesse de vários pesquisadores, possibilitando a redução dos custos operacionais [2]. Os métodos de identificação de danos, fundamentados na resposta dinâmica da estrutura, vem se tornando uma prática utilizada nas indústrias da construção civil, mecânica e aeroespacial. Sendo classificados, de forma geral, em três tipos, de acordo com o domínio dos dados utilizados: domínio do tempo, domínio da frequência e nas formas modais [5].

Neste trabalho, a identificação de danos estruturais é realizada utilizando os dados modais da estrutura, especificamente a matriz de flexibilidade. Geralmente as técnicas de identificação de danos estruturais são fundamentadas no ajuste de um Modelo de Elementos Finitos (MEF). Outra técnica, recentemente proposta, de identificação de danos

¹isilva@iprj.uerj.br

²diegoknupp@iprj.uerj.br

³ltstutz@iprj.uerj.br

⁴lrangel@iprj.uerj.br

é baseada no Modelo de Superfície de Resposta (MSR), que está ganhando popularidade devido à sua eficiência computacional [4]. Portanto, na formulação do problema inverso de identificação de danos, considerou-se o ajuste de um MSR, em substituição do MEF, de uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada.

O problema inverso de identificação de danos é realizado a partir da inferência Bayesiana. Dentre suas vantagens, pode-se destacar a capacidade de incluir informações *a priori*, a facilidade de incorporá-las em um contexto formal de decisão, o tratamento explícito das incertezas do problema e a habilidade de assimilar novas informações em contextos adaptativos [8]. A estimação de parâmetros é obtida com o método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC), usando o algoritmo Metropolis-Hasting com uma distribuição *priori* gaussiana.

2 Modelagem Matemática do Problema Direto

Na abordagem adotada no presente trabalho, o dano é continuamente descrito ao longo da estrutura por um parâmetro de coesão definido como

$$\beta(x) = \frac{E(x)I(x)}{E_0I_0}, \quad (1)$$

onde $E(x)$ e $I(x)$ são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o momento de inércia de área da seção transversal e E_0 e I_0 são os correspondentes valores nominais. Esse parâmetro relaciona-se com a ligação entre os pontos materiais e pode ser interpretado como uma medida do estado de coesão local do material, onde $0 \leq \beta \leq 1$ [6].

Considerando, por simplicidade, que a viga possui seção retangular e que o módulo de elasticidade é uniforme, de acordo com a Eq. (1), tem-se

$$\beta(x) = \left(\frac{h(x)}{h_0}\right)^3, \quad (2)$$

onde h_0 e $h(x)$, indicam, respectivamente, a espessura nominal e a espessura da viga na posição x . Discretizando espacialmente o campo de coesão em n_p nós, pelo MEF, tem-se o vetor de parâmetros nodais de coesão

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_p}]^T. \quad (3)$$

A matriz de flexibilidade da estrutura pode ser escrita como

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^T, \quad (4)$$

onde n representa o número de graus de liberdade (GDL) do MEF do sistema, ω_i é a i -ésima frequência natural não-amortecida e $\boldsymbol{\phi}_i$ é a i -ésima forma modal da estrutura [7], normalizada em relação à matriz de massa, obtidas do problema de autovalor generalizado

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Como se pode observar a partir da Eq. (4), devido à relação inversa com o valor quadrático das frequências naturais, pode-se obter uma estimativa precisa da matriz de flexibilidade a partir dos modos de mais baixa frequência da estrutura. Dado que os modos de frequência mais elevada são mais difíceis de serem obtidos em um ensaio experimental, a rápida convergência da matriz de flexibilidade representa uma grande vantagem para a sua utilização na formulação do problema inverso de identificação de danos. Devido às limitações práticas inerentes aos testes modais, a seguinte aproximação da matriz de flexibilidade pode ser obtida experimentalmente

$$\mathbf{G}_E = \sum_{i=1}^{n_E} \frac{1}{\omega_{iE}^2} \phi_{iE} \phi_{iE}^T, \quad (6)$$

onde $n_E < n$ é o número de modos obtidos do ensaio experimental, ω_{iE} e ϕ_{iE} são, respectivamente, a i -ésima frequência natural não-amortecida e a forma modal obtidas experimentalmente. Note-se que a ordem da matriz de flexibilidade experimental \mathbf{G}_E depende apenas do número m de GDL medidos no ensaio modal, que é equivalente ao número de componentes das formas modais experimentais ϕ_{iE} .

3 Modelo de Superfície de Resposta

Em um Modelo de Superfície de Resposta (MSR), relações explícitas são definidas entre os parâmetros da estrutura e a resposta de interesse. No caso, entre os parâmetros nodais de coesão e os elementos da matriz de flexibilidade estrutural. Assim, para uma dada resposta escalar g , tem-se

$$g = f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_p}) + \varepsilon, \quad (7)$$

onde f é uma superfície de resposta, ou função de resposta, e ε representa o erro de predição do modelo, que é considerado como uma variável aleatória normalmente distribuída com média nula. Em geral, os parâmetros do modelo são codificados como

$$x_i = \frac{\beta_i - (\beta_{min} + \beta_{max})/2}{(\beta_{max} - \beta_{min})/2}, \quad i = 1, 2, \dots, n_p, \quad (8)$$

tal que $x_i \in [-1, 1]$; β_{min} e β_{max} são, respectivamente, os valores mínimo e máximo dos parâmetros de coesão considerados na determinação do MSR.

Nesse trabalho, será considerada uma superfície de resposta polinomial de segunda ordem, dada por

$$\hat{g} = f(x_1, x_2, \dots, x_{n_p}) = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \hat{\alpha}_i x_i + \sum_{i=1}^{n_p} \hat{\alpha}_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^{n_p} \sum_{j=2}^{n_p} \hat{\alpha}_{ij} x_i x_j. \quad (9)$$

onde $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\alpha}_{ii}$ e $\hat{\alpha}_{ij}$ são os coeficientes da superfície de resposta, estimados pelo método dos mínimos quadrados [5].

De acordo com a Eq. (9), o número de coeficientes do polinômio adotado é $n_c = (n_p + 1)(n_p + 2)/2$. Portanto, para a definição apropriada da superfície de resposta, deve-se ter um número de dados maior ou igual ao número de seus coeficientes, $n_d \geq n_c$. No presente caso, um dado significa o par $(x; \hat{g})$, isto é, um vector constituído por valores codificados dos parâmetros de coesão, que descreve um cenário de dano, e a correspondente resposta estrutural de interesse. O Projeto Fatorial Fracionado (2^{n_p-f}) será aqui considerado para a escolha dos pontos utilizados na determinação da superfície de resposta utilizada no presente trabalho.

4 Problema Inverso de Identificação de Danos

Na Inferência Bayesiana, os parâmetros do modelo são considerados variáveis aleatórias e o objetivo reside na determinação da densidade de probabilidade *a posteriori* associada a cada parâmetro. Pelo teorema de Bayes, a densidade de probabilidade conjunta *a posteriori* dos parâmetros é dada por

$$P_{post}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{G}_E) = \frac{P(\mathbf{G}_E|\boldsymbol{\beta})P_{pr}(\boldsymbol{\beta})}{P(\mathbf{G}_E)}, \quad (10)$$

onde $P(\mathbf{G}_E|\boldsymbol{\beta})$, é a função de verossimilhança, $P_{pr}(\boldsymbol{\beta})$ é a densidade de probabilidade *a priori* e $P(\mathbf{G}_E)$ é a densidade de probabilidade das respostas medidas, que desempenha o papel de uma constante de normalização [3].

Considerando-se que os erros experimentais apresentam uma distribuição de probabilidade normal, a verossimilhança é dada por

$$P(\mathbf{G}_E|\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{V}}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_e}}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{G}_E - \hat{\mathbf{G}})^T \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{G}_E - \hat{\mathbf{G}}) \right], \quad (11)$$

sendo n_e o número de dados experimentais utilizados no problema, \mathbf{V} a variância dos erros experimentais e $\hat{\mathbf{G}}$ a resposta prevista pelo MSR.

Para a obtenção da densidade de probabilidade marginal de cada parâmetro, será aqui considerando o método de amostragem de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC) [1]. Na geração das cadeias de Markov foi utilizado o algoritmo de Metropolis-Hastings, que faz uso de uma densidade de probabilidade auxiliar $\mathbf{q}(\boldsymbol{\beta}^*|\boldsymbol{\beta}_{i-1})$, que fornece uma regra para a geração de um vector candidato $\boldsymbol{\beta}^*$, dado um estado atual $\boldsymbol{\beta}_{i-1}$ da cadeia. Sendo o vector candidato $\boldsymbol{\beta}^*$ aceito ou não, de acordo com a probabilidade dada por:

$$r = \min \left[1, \frac{P(\boldsymbol{\beta}^*)P(\boldsymbol{\beta}^*|\boldsymbol{\beta}_{i-1})}{P(\boldsymbol{\beta}_{i-1})P(\boldsymbol{\beta}_{i-1}|\boldsymbol{\beta}^*)} \right]. \quad (12)$$

Se $U \leq r$, onde U é um número aleatório gerado de uma distribuição uniforme entre 0 e 1, então o candidato $\boldsymbol{\beta}^*$ é aceito, caso contrário, é rejeitado.

Esse procedimento é repetido N vezes, onde N é o tamanho da cadeia, resultando na cadeia de Markov $\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_N\}$. Os estados gerados até que se alcance o equilíbrio são chamados de amostras de aquecimento (burn-in) e são descartados para a determinação das propriedades estatísticas dos parâmetros de coesão [8].

5 Resultados Numéricos

A metodologia proposta é validada em uma viga de alumínio simplesmente apoiada cujos parâmetros geométricos e materiais são: 1 m de comprimento, 0,005 m de espessura, 0,05 m de largura, 2700 kg/m^3 de massa específica, $5,21 \times 10^{-10} \text{ m}^4$ e $7,26 \times 10^{10} \text{ Pa}$ de momento de inércia de área e módulo de elasticidade, respectivamente. A viga foi discretizada em 20 elementos bidimensionais do tipo Euler-Bernoulli, onde cada elemento possui dois GDL, totalizando assim, 40 GDL, e um parâmetro de coesão, logo, a viga possui 21 parâmetros nodais de coesão. Considerou-se que apenas os 10 primeiros modos de vibrações foram medidos em 10 GDL da estrutura.

Neste trabalho, o MEF, com os valores dos parâmetros de coesão prescritos de acordo com os cenários de dano foi considerado, para gerar a matriz de flexibilidade experimental sintética, da estrutura danificada. No entanto, no processo de identificação de danos, como modelo direto é utilizado o MSR.

A Tabela 1, apresenta os cenários de dano considerados neste trabalho, onde o nível de ruído representa o percentual de ruído aditivo, na forma modal, para a geração da matriz de flexibilidade experimental.

Tabela 1: Cenários de danos.

Cenário	Posição (m)	$h(x)/h_0$	$\beta(x)$	Nível de ruído (%)
1	0,35 (β_8)	0,8	0,512	1
2	0,2 (β_5); 0,55 (β_{12})	0,8; 0,8	0,512; 0,512	1

Para todas as simulações foram consideradas cadeias de Markov com 100.000 estados com aquecimento de 80.000 estados. Foi adotada uma distribuição auxiliar uniforme truncada com desvio padrão $\sigma = 0,005$ e uma distribuição *priori* gaussiana com desvio padrão de 0,5 para todos os Casos.

Na Figura 1(a) é apresentado o resultado da identificação de danos, em termo da altura relativa, onde mostra os campos de dano exato e estimado para o Caso 1, além do intervalo de confiança (IC) de 95%. E, a Figura 1(b) mostra a convergência da cadeia de Markov para o parâmetro danificado β_8 .

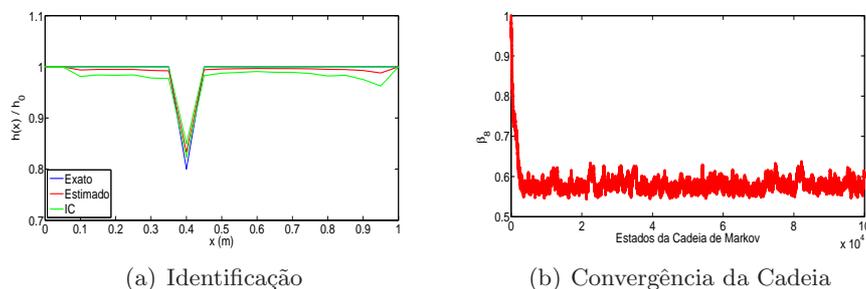
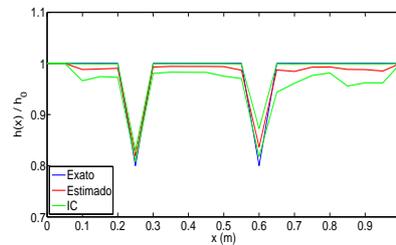
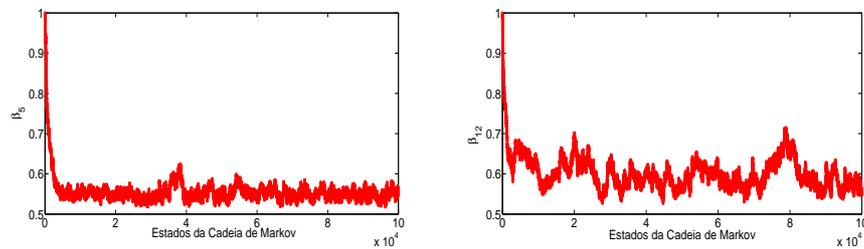


Figura 1: Resultados da identificação para o Caso 1.

Pode-se observar que o MCMC foi capaz de identificar com acurácia a intensidade do dano existente na estrutura, mesmo considerando 1% de ruído nos modos de vibração. As Figuras 2(a) e 2(b) apresentam o resultado da identificação de danos e a convergência das cadeias de Markov, para os parâmetros danificados β_5 e β_{12} , do Caso 2.



(a) Identificação



(b) Convergência das Cadeias

Figura 2: Resultados da identificação para o Caso 2.

Com o resultado da identificação de danos apresentado pela Figura 2 pode-se observar que o MCMC identificou as duas posições de dano do Caso 2. Portanto, a partir dos resultados obtidos percebe-se que a estratégia adotada identificou de forma bastante satisfatória os cenários de dano considerados.

6 Conclusões

Neste trabalho, o problema de identificação de danos estruturais em uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada foi resolvido a partir de uma abordagem Bayesiana. Inicialmente foi ajustado um MSR da estrutura, a fim de substituir o MEF no problema inverso. A solução do problema inverso de estimação, foi obtida pelo método MCMC, implementado através do algoritmo de Metropolis-Hastings. Pelos resultados obtidos, concluiu-se que a estratégia adotada foi capaz de identificar os cenários de danos mesmo considerando a presença de ruído. Como sugestões de trabalhos futuros destaca-se a aplicação da abordagem Bayesiana no problema de identificação de danos em estruturas do tipo placa.

Agradecimentos

Os autores deixam aqui registrados os agradecimentos às agências de fomento CAPES, CNPq e FAPERJ pelo apoio concedido.

Referências

- [1] D. C. S. Cuevas. Estimaco de Parâmetros de Materiais Heterogêneos com o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov. Dissertao de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, pages 109, 2014.
- [2] S. E. Fang, W. X. Ren and R. Perera. A stochastic model updating method for parameter variability quantification based on response surface models and Monte Carlo simulation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 33: 83-96, 2012.
- [3] J. P. Kaipio, E. Somersalo. Statistical and Computational Inverse Problems, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [4] T. Mukhopadhyay, T. K. Dey, R. Chowdhury and A. Chakrabarti. Structural Damage Identification Using Response Surface-Based Multi-objective Optimization: A Comparative Study. *Arab J. Sci. Eng.*, 40: 1027-1044, 2015.
- [5] I. C. S. S. Rangel, L. S. Rangel e L. T. Stutz. Identificao de Danos Estruturais a partir de um Modelo de Superfície de Resposta. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 17: 267-282, 2016.
- [6] L. T. Stutz, D. A. Castello and F. A. Rochinha, A flexibility-based continuum damage identification approach. *Journal of Sound and Vibration*, 279: 641-667, 2005.
- [7] L. T. Stutz, R. A. Tenenbaum and R. A. P. Correa. The Differential Evolution method applied to continuum damage identification via flexibility matrix. *Journal of Sound and Vibration*, 345: 86-102, 2015
- [8] J. S. Teixeira, L. T. Stutz, D.C. Knupp and A. J. Silva Neto. Application of a Continuum Damage Identification Approach via Markov Chain Monte Carlo Method using the Impulsive Response Function. *8th International Conference on Inverse Problems in Engineering*, Cracow, Poland, 2014.