Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Equações Integrais de Volterra em Escalas Temporais

Iguer L. D. Santos,
Departamento de Matemática, FEIS, UNESP,
15385-000, Ilha Solteira, SP
E-mail: iguerluis@yahoo.com.br.

Resumo: *Nesse artigo consideramos duas classes de equações integrais de Volterra em escalas temporais. Obtemos para essas classes de equações integrais, propriedades de continuidade e convergência de soluções.*

Palavras-chave: *Equações Integrais de Volterra, Escalas Temporais, Dependência Contínua*

1 Introdução

O cálculo em escalas temporais foi introduzido por Hilger [11] para unificar o cálculo de diferença e o cálculo diferencial. A teoria de escalas temporais admite diversas aplicações em modelagem matemática e outras áreas, conforme verificamos em [2], [4], [5], [6], [9], [12], [17] e [18]. Em particular, equações integrais de Volterra em escalas temporais foram consideradas, por exemplo, em [1], [13] e [14].

Nesse trabalho provamos propriedades de continuidade e convergência de soluções para duas classes de equações integrais de Volterra em escalas temporais. Tais propriedades constituem extensões dos respectivos casos clássicos considerados em [7] para escalas temporais.

2 Preliminares

Nesta seção consideramos conceitos e resultados básicos da teoria de escalas temporais que serão úteis no desenvolvimento desse trabalho.

Utilizaremos as seguintes convenções:

i) se $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos a norma euclidiana de x por $\|x\|$.

ii) se A e $\mathbb{T}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, denotamos por $A_{\mathbb{T}}$ o conjunto $A \cap \mathbb{T}$.

2.1 Escala temporal

Uma escala temporal $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio e fechado. Usaremos uma escala temporal $\mathbb{T}$ compacta, sendo $a = \min \mathbb{T}$ e $b = \max \mathbb{T}$.

Define-se a função $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ como

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

Estamos supondo que $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$.

Lema 2.1 **([8])** *Existem $I \subset \mathbb{N}$ e $\{t_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{T}$ tal que*

$$RS := \{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i\in I}.$$

2.2 Integração em escalas temporais

A obtenção da σ-álgebra de subconjuntos da escala temporal $\mathbb{T}$, constituída de conjuntos Δ-mensuráveis, pode ser encontrada em [10]. Denotaremos essa σ-álgebra por Δ.

Para funções $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ a noção de integração pode ser encontrada, por exemplo, em [3], [15] e [16]. Denotamos a integral de uma função $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ sobre um conjunto $E \in \Delta$ por

$$\int_E f(s)\Delta s.$$

Chamamos essa integral de Δ-integral de Lebesgue de f sobre E. Denotaremos por $L_1(E, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ Δ-integráveis sobre E.

Dada uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ defina $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), \ t \in \mathbb{T} \\ f(t_i), \quad t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I, \end{cases}$$

onde $I \subset \mathbb{N}$ e $\{t_i\}_{i \in I} = RS$.

Seja $E \subset \mathbb{T}$ e defina

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{i \in I_E} (t_i, \sigma(t_i))$$

onde

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap RS\} \ .$$

O teorema a seguir é provado em [8] para funções escalares. Entretanto, esse resultado continua válido para funções vetoriais, como afirmado a seguir.

Teorema 2.1 ([8]) *Seja $E \in \Delta$ tal que $b \notin E$. Então, $f \in L_1(E, \mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\tilde{f} \in L_1(\tilde{E}, \mathbb{R}^n)$. Neste caso,*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(s) ds.$$

Usaremos também a seguinte generalização do Lema de Gronwall.

Teorema 2.2 *Sejam $\varphi : [t_0, t_1] \to [0, +\infty)$ uma função Lebesgue integrável e $\psi : [t_0, t_1] \to [0, +\infty)$ uma função contínua. Suponha que*

$$\varphi(t) \leq K + L \int_{t_0}^{t} \psi(s)\varphi(s) ds$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$, com $K \geq 0$ e $L \geq 0$. Então

$$\varphi(t) \leq K \exp L \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

3 Equações integrais de Volterra

Sejam $g : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ funções dadas. Nesse trabalho consideramos as seguintes equações integrais de Volterra em escalas temporais

$$x(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, x(s))\Delta s \tag{1}$$

$$x(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, x(\sigma(s)))\Delta s \tag{2}$$

onde $t \in \mathbb{T}$ e $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ é a função incógnita.

A existência de soluções contínuas para essas duas classes de equações integrais podem ser encontradas em [13].

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0003

4 Continuidade e convergência de soluções

Nessa seção obtemos as extensões das propriedades de continuidade e convergência de soluções consideradas em [7] para escalas temporais.

4.1 Continuidade de soluções

Consideramos primeiro a continuidade de soluções com relação às condições iniciais para a equação 1. Outro resultado de dependência contínua para essa classe de equações integrais foi obtido em [13]. Assim, sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções das equações

$$x(t) = f_1(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, x(s))\Delta s \tag{3}$$

e

$$y(t) = f_2(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, y(s))\Delta s \tag{4}$$

em $\mathbb{T}$, com $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \delta$, então para g de Lipschitz devemos ter $\|x - y\|_\infty \leq \epsilon$.

Teorema 4.1 *Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ e $g : U \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas, com*

$$U = \{(t, s, x) : a \leq s \leq t \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Suponha que exista $L > 0$ tal que $|g(t, s, x) - g(t, s, y)| \leq L|x - y|$ em U. Sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções de 3 e 4, respectivamente, em $\mathbb{T}$. Se $\delta = \|f_1 - f_2\|_\infty$ então

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta e^{L(t-a)}$$

para todo $t \in \mathbb{T}$.

A demonstração desse teorema segue nas mesmas linhas da demonstração do respectivo caso contínuo [7]. Para isso são usados os teoremas 2.1 e 2.2.

Consideramos agora a continuidade de soluções com relação às condições iniciais para a equação 2. Assim, sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções das equações

$$x(t) = f_1(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, x(\sigma(s)))\Delta s \tag{5}$$

e

$$y(t) = f_2(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t, s, y(\sigma(s)))\Delta s \tag{6}$$

em $\mathbb{T}$.

Teorema 4.2 *Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ e $g : U \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas, com*

$$U = \{(t, s, x) : a \leq s \leq t \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Suponha que exista $L > 0$ tal que $|g(t, s, x) - g(t, s, y)| \leq L|x - y|$ em U. Sejam $x(t)$ e $y(t)$ soluções de 5 e 6, respectivamente, em $\mathbb{T}$. Se $\delta = \|f_1 - f_2\|_\infty$ e $L(b - a) < 1$ então

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta + M\delta e^{ML(t-a)}$$

para todo $t \in \mathbb{T}$, onde $M = \frac{1}{1-(b-a)L}$.

4.2 Convergência de soluções

Obtemos a seguir resultados de convergência de soluções para equações integrais de Volterra em escalas temporais.

Teorema 4.3 *Seja $\{g_k\}$ uma sequência de funções contínuas, com $g_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$\|g_k(t,s,x)\| \leq C(1 + \|x\|)$$

para todo $(t,s,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{f_k\}$ é uma sequência de funções $f_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ uniformemente limitada e equicontínua tal que $f_k \rightrightarrows f$. Suponha também que

(a) $g_k(t,s,x) \to g(t,s,x)$ *em* $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$.

(b) existe $L > 0$ tal que $\|g_k(t,s,x) - g_k(t,s,y)\| \leq L\|x - y\|$ para todo k.

(c) para cada k, $\psi_k(t)$ é uma solução contínua de

$$\psi_k(t) = f_k(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g_k(t,s,\psi_k(s))\Delta s,$$

$t \in \mathbb{T}$.

(d) para cada $\epsilon > 0$ e $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|g_k(t,s,x) - g_k(t_1,s,x)\| \leq \epsilon \mid t - t_1 \mid$$

onde $s \in \mathbb{T}$, $\mid t - t_1 \mid < \delta$, $t, t_1 \in \mathbb{T}$, $\|x\| \leq M$ e k é um inteiro.

Então existe uma subsequência $\{\psi_{k_j}\} \subset \{\psi_k\}$ e uma função $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\psi_{k_j} \rightrightarrows \psi$, e ψ satisfaz

$$\psi(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t,s,\psi(s))\Delta s$$

em $\mathbb{T}$.

A demonstração desse teorema também segue nas mesmas linhas da demonstração do respectivo caso contínuo [7]. Além disso, são usados os teoremas 2.1 e 2.2 na obtenção desse resultado.

Um resultado de convergência análogo também pode ser obtido para a classe de equações 2.

Teorema 4.4 *Seja $\{g_k\}$ uma sequência de funções contínuas, com $g_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$\|g_k(t,s,x)\| \leq C(1 + \|x\|)$$

para todo $(t,s,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{f_k\}$ é uma sequência de funções $f_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ uniformemente limitada e equicontínua tal que $f_k \rightrightarrows f$. Suponha também que

(a) $g_k(t,s,x) \to g(t,s,x)$ *em* $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$.

(b) $\|g_k(t,s,x) - g_k(t,s,y)\| \leq L\|x - y\|$ *para todo k.*

(c) para cada k, $\psi_k(t)$ é uma solução contínua de

$$\psi_k(t) = f_k(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g_k(t,s,\psi_k(\sigma(s)))\Delta s,$$

$t \in \mathbb{T}$.

(d) para cada $\epsilon > 0$ e $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|g_k(t,s,x) - g_k(t_1,s,x)\| \leq \epsilon \mid t - t_1 \mid$$

quando $s \in \mathbb{T}$, $\mid t - t_1 \mid < \delta$, $t, t_1 \in \mathbb{T}$, $\|x\| \leq M$ e k é um inteiro.

Se $C(b-a) < 1$, então existe uma subsequência $\{\psi_{k_j}\} \subset \{\psi_k\}$ e uma função $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\psi_{k_j} \rightrightarrows \psi$, e ψ satisfaz

$$\psi(t) = f(t) + \int_{[a,t)_{\mathbb{T}}} g(t,s,\psi(\sigma(s)))\Delta s$$

em $\mathbb{T}$.

5 Conclusões

Esse trabalho contribuiu para o avanço do conhecimento na teoria de escalas temporais. Mais especificamente, usando uma generalização do Lema de Gronwall prova propriedades de continuidade e convergência de soluções contínuas para equações integrais de Volterra em escalas temporais.

Referências

[1] M. Adivar and Y. N. Raffoul. Existence of resolvent for Volterra integral equations on time scales. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 82(1):139–155, 2010.

[2] R. Agarwal, M. Bohner, D. O'Regan, and A. Peterson. Dynamic equations on time scales: a survey. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 141(1):1–26, 2002.

[3] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.

[4] M. Bohner and G. S. Guseinov. Surface areas and surface integrals on time scales. *Dynam. Systems Appl.*, 19(3-4):435–453, 2010.

[5] M. Bohner, G. S. Guseinov, and B. Karpuz. Properties of the Laplace transform on time scales with arbitrary graininess. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 22(11):785–800, 2011.

[6] M. Bohner and A. Peterson. *Advances in dynamic equations on time scales.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003.

[7] T. A. Burton. *Volterra integral and differential equations*, volume 202 of *Mathematics in Science and Engineering.* Elsevier B. V., Amsterdam, second edition, 2005.

[8] A. Cabada and D. R. Vivero. Expression of the lebesgue δ-integral on time scales as a usual lebesgue integral; application to the calculus of δ-antiderivatives. *Mathematical and Computer Modelling*, 43(1):194–207, 2006.

[9] M. Federson, J. G. Mesquita, and A. Slavík. Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales. *Journal of Differential Equations*, 252(6):3816–3847, 2012.

[10] G. S. Guseinov. Integration on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 285(1):107–127, 2003.

[11] S. Hilger. Analysis on measure chains—a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results Math.*, 18(1-2):18–56, 1990.

[12] R. Hilscher and V. Zeidan. First order conditions for generalized variational problems over time scales. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(9):3490–3503, 2011.

[13] T. Kulik and C. C. Tisdell. Volterra integral equations on time scales: basic qualitative and quantitative results with applications to initial value problems on unbounded domains. *Int. J. Difference Equ.*, 3(1):103–133, 2008.

[14] D. B. Pachpatte. On a nonstandard Volterra type dynamic integral equation on time scales. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, (72):1–14, 2009.

[15] H. L. Royden. *Real analysis*. Macmillan Publishing Company, New York, third edition, 1988.

[16] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[17] I. L. D. Santos and G. N. Silva. Absolute continuity and existence of solutions to dynamic inclusions in time scales. *Mathematische Annalen*, 356:373–399, 2013.

[18] Z. Zhan, W. Wei, and H. Xu. Hamilton-jacobi-bellman equations on time scales. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(9-10):2019–2028, 2009.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0003