Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Estabilidade Exponencial para um Problema de Transmissão para Equação da onda Amortecida

Félix Pedro Quispe Gómez
Departamento Acâdemico de Matemática, DAMAT - UTFPR,
80230-901, Curitiba, PR
E-mail: felixgomez@utfpr.edu.br, felix12gomez@gmail.com

Resumo: *Estudamos um problema de transmissão de um sistema de equações hiperbólicas formado por uma equação da onda amortecida tipo frição e uma equação da onda agindo cada uma numa parcela de seu domínio unidimensional. Para este modelo obtemos o decaimento exponencial utilizando a sistemática dos semigrupos e técnicas multiplicativas.*

Palavras-chave: *Semigrupos C_o, Estabilidade Exponencial, Problema Transmissão*

1 Introdução

A preocupação principal será obter decaimento exponencial do seguinte sistema de equações diferenciais parciais. Considere um intervalo $]0,\ L[\subset \mathbb{R}$ que se encontra dividido em dois subintervalos abertos, $]0,\ l_0[$ e $]l_0,\ L[$. As equações diferenciais que governam o fenômeno são,

$$\partial_t^2 u - \alpha\partial_x^2 u + \gamma\partial_t u = 0 \qquad \text{em} \qquad]0, l_0[\times]0, +\infty[\tag{1.1}$$

$$\partial_t^2 v - \beta\partial_x^2 v = 0 \qquad \text{em} \qquad]l_0, L[\times]0, +\infty[\tag{1.2}$$

com condições de transmissão,

$$u(l_o, t) = v(l_o, t), \qquad t \in]0, +\infty[\tag{1.3}$$

$$\alpha\partial_x u(l_o, t) = \beta\partial_x v(l_o, t), \qquad t \in]0, +\infty[\tag{1.4}$$

condições de fronteira,

$$u(0, t) = v(L, t) = 0, \qquad t \in]0, +\infty[\tag{1.5}$$

condições iniciais,

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), \quad x \in]0, l_0[\tag{1.6}$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \qquad \partial_t v(x, 0) = v_1(x), \quad x \in]l_0, L[\tag{1.7}$$

e finalmente as condições de compatibilidade,

$$u_o(l_0) = v_o(l_0), \qquad u_1(l_0) = v_1(l_0)$$
$$\alpha\, \partial_x u_o(l_o) = \beta\, \partial_x v_o(l_0).$$

Vejamos a seguinte Figura 1 que ilustra o domínio do sistema em estudo, as constantes α e β são distintas e a dissipação escolhida atua somente no domínio da função u.

 © 2014 SBMAC

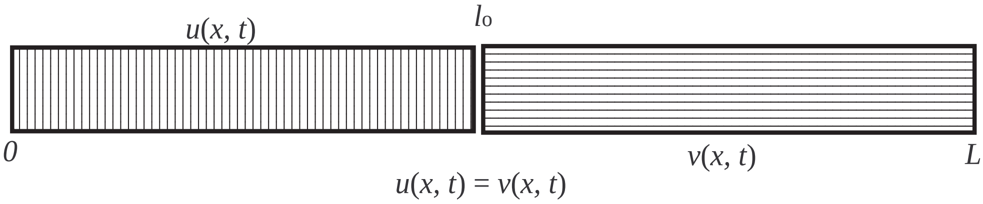

Figura 1: Domínio do problema de Transmissão

2 Notações e Espaços Necessários

Considere os seguintes espaços

$$V_1 = \{w \in H^1(0, l_o)\colon w(0) = 0\}, \qquad V_2 = \{v \in H^1(l_o, L)\colon v(L) = 0\}.$$

Para os intervalos que formam o domínio adotamos a seguinte notação

$$I_1 =]0, l_o[\quad \text{e} \quad I_2 =]l_o, L[.$$

Para a reformulação do problema consideramos as seguintes variáveis,

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \\ v \\ \partial_t v \end{pmatrix}, \quad U(0) = \begin{pmatrix} u_o \\ u_1 \\ v_o \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \alpha\partial_x^2 & -\gamma I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \beta\partial_x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\partial_t U = \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_t^2 u \\ \partial_t v \\ \partial_t^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \alpha\partial_x^2 u - \gamma\partial_t u \\ \partial_t v \\ \beta\partial_x^2 v \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}U = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \alpha\partial_x^2 & -\gamma I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \beta\partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \\ v \\ \partial_t v \end{pmatrix}.$$

Logo o sistema correspondente ao problema de valor inicial (1.1)-(1.2) e (1.6) -(1.7), se transforma numa equação de evolução autônoma,

$$\partial_t U = \mathcal{A}U, \quad t \geq 0, \qquad U(0) = U_o \tag{2.8}$$

A seguir construimos os espaços para esta reformulação. Considere o espaço

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} : u^i \in V_i, \quad v^i \in L^2(I_i), \quad i = 1, 2, \quad u^1(l_0) = u^2(l_0) \right\}$$

com a seguinte norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^{l_0} \alpha|\partial_x u^1|^2 + |v^1|^2\,dx + \int_{l_0}^{L} \beta|\partial_x u^2|^2 + |v^2|^2\,dx.$$

O operador $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ possue o seguinte domínio,

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\colon u^i \in V_i \cap H^2(I_i), \quad v^i \in V_i, \quad i = 1, 2, \quad \alpha\partial_x u^1(l_0) = \beta\partial_x u^2(l_0) \right\}.$$

Theorem 2.1 *O problema de valor inicial* (2.8) *como o operador $\mathcal{A}$ linear esta bem colocado se e somente se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de classe C_o. Neste caso a única solução de* (2.8) *esta dada por $U(t) = S(t)U_o$ para U_o no domínio de $\mathcal{A}$.*

Prova. A prova deste teorema se encontra em Goldstein [3]. □

 © 2014 SBMAC

3 Existência de Soluções

Utilizaremos o teorema de Hille-Yosida para semigrupos. Uma das hipóteses foi provada anteriormente. As únicas condições que estão faltando mostrar são as seguintes,

$$\mathbb{R}^+ \subset \rho(\mathcal{A}) \qquad \text{e} \qquad \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

onde a segunda é equivalente a,

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} F\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{\lambda}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Podemos representar $U = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F$ e com esta notação temos a seguinte equivalência,

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} F = U \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda U - \mathcal{A}U = (\lambda I - \mathcal{A})U = F,$$

e nos leva para seguinte equação em termos das coordenadas,

$$\lambda \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \\ u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v^1 \\ \alpha\partial_x^2 u^1 - \gamma v^1 \\ v^2 \\ \beta\partial_x^2 u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \\ f_2 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

O sistema resolvente que nos permite mostrar a condições procuradas é,

$$\lambda u^1 - v^1 = f_1 \quad \text{em} \quad I_1, \tag{3.9}$$

$$\lambda v^1 - \alpha\partial_x^2 u^1 + \gamma v^1 = g_1 \quad \text{em} \quad I_1, \tag{3.10}$$

$$\lambda u^2 - v^2 = f_2 \quad \text{em} \quad I_2, \tag{3.11}$$

$$\lambda v^2 - \beta\partial_x^2 u^2 = g_2 \quad \text{em} \quad I_2. \tag{3.12}$$

A etapa final será atuar em cada uma das equações que formam o sistema resolvente. Primeiro, multiplicamos pelos conjugados,

$$-\alpha\,\overline{\partial_x^2 u^1}, \qquad \overline{v^1}, \qquad -\beta\,\overline{\partial_x^2 u^2}, \qquad \overline{v^2}$$

as equações (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) respectivamente. Logo somando esses resultados e utilizando as condições de transmissão (1.3) e (1.4) obteremos a seguinte desigualdade,

$$\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \gamma\int_0^{l_o} |v^1|^2 dx \leq \|U\|\|F\| \tag{3.13}$$

de onde obtemos,

$$\lambda\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\| = \lambda\|U\| \leq \|F\|$$

logo

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

sendo o que desejavamos mostrar. □

4 Resultado de Decaimento Exponencial

O nosso resultado de decaimento é uma aplicação do seguinte teorema,

Theorem 4.1 *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo de classe C_o de contrações num espaço de Hilbert. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$i\,\mathbb{R} \equiv \{i\,\beta,\ \ \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A)$$

e

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq C, \qquad \forall \quad Re[\lambda] \geq 0$$

são válidas.

Prova. A prova encontra-se nos trabalhos de Gearhart [2], Huang [4] e e Prüss [1]. □

 © 2014 SBMAC

5 Resultado Principal

Utilizando o mesmo procedimento para encontrar a estimativa (3.13) da seção anterior com $\lambda \in \mathbb{C}$ obtemos

$$Re[\lambda]\,\|U\|^2 + \gamma \int_0^{l_o} |v^1|^2 dx \leq \|U\|\|F\|.$$

Em particular se tomamos $\lambda = i\,\beta$ temos que $Re\,[\lambda] = 0$ e obtemos a seguinte estimativa,

$$\gamma \int_0^{l_o} |v^1|^2 dx \leq \|U\|\|F\| \tag{5.14}$$

onde a norma de U em $\mathcal{H}$ é dada por,

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \alpha|\partial_x u^1|^2 + |v^1|^2\, dx + \int_{l_0}^{L} \beta|\partial_x u^2|^2 + |v^2|^2\, dx.$$

A idéia central, nesta implementação do Teorema 4.1 para com nosso problema em questão, é a recuperação da norma de U. Apartir de agora esse será nosso objetivo.

Multiplicando a equação (3.10) pelo conjugado $\overline{u^1}$ e integrando em I_1 obtemos,

$$\lambda \int_o^{l_o} v^1\overline{u^1}dx + \alpha \int_o^{l_o} |\partial_x u^1|^2 dx - \alpha u^1(l_o)\partial_x u^1(l_o) + \gamma \int_o^{l_o} v^1\overline{u^1}dx = \int_o^{l_o} g_1\overline{u^1}dx.$$

ou

$$\alpha \int_o^{l_o} |\partial_x u^1|^2 dx = -\lambda \int_o^{l_o} v^1\overline{u^1}dx - \gamma \int_o^{l_o} v^1\overline{u^1}dx + \int_o^{l_o} g_1\overline{u^1}dx + \alpha u^1(l_o)\partial_x u^1(l_o)$$

logo utilizando a equação (3.9) temos,

$$\begin{aligned}\alpha \int_o^{l_o} |\partial_x u^1|^2 dx = &-\frac{\lambda}{\overline{\lambda}} \int_o^{l_o} |v^1|^2 dx - \gamma \int_o^{l_o} v^1\overline{u^1}dx \\ &+ \int_o^{l_o} g_1\overline{u^1}dx - \frac{\lambda}{\overline{\lambda}} \int_o^{l_o} \overline{f}_1\, v^1 dx + \alpha\, u^1(l_o)\partial_x u^1(l_o).\end{aligned}$$

Utilizando a estimativa (3.13) e a desigualdade de Poincaré,

$$\frac{\alpha}{2} \int_o^{l_o} |\partial_x u^1|^2 dx \leq C\|F\|\|U\| + |\alpha\, u^1(l_o)\partial_x u^1(l_o)|. \tag{5.15}$$

Multiplicando a relação (3.10) pela quantidade $x\overline{\partial_x u^1}$ e integrando temos,

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^{l_o} xv^1\overline{\partial_x u^1}dx - \alpha \int_0^{l_o} x\partial_x^2 u^1\overline{\partial_x u^1}dx + \gamma \int_0^{l_o} xv^1\overline{\partial_x u^1}dx \\ = \int_0^{l_o} x\, g_1\overline{\partial_x u^1}dx\end{aligned}$$

ou de forma equivalente,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\overline{\lambda}} \int_0^{l_o} x\, v^1\overline{\partial_x v^1}dx - \frac{\alpha}{2} \int_0^{l_o} \partial_x|\partial_x u^1|^2 dx + \gamma \int_0^{l_o} xv^1\overline{\partial_x u^1}dx \\ = \int_o^{l_o} x\, g_1\overline{\partial_x u^1}dx - \frac{\lambda}{\overline{\lambda}} \int_0^{l_o} x\, v^1\overline{\partial_x f_1}dx.\end{aligned}$$

Especificamente teremos a seguinte situção,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \int_o^{l_o} x\partial_x|v^1|^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_o^{l_o} x\partial_x|\partial_x u^1|^2 dx \\ = -\gamma \int_o^{l_o} xv^1\overline{\partial_x u^1}dx + \int_o^{l_o} x\, g_1\overline{\partial_x u^1}dx - \frac{\lambda}{\overline{\lambda}} \int_0^{l_o} x\, v^1\overline{\partial_x f_1}dx.\end{aligned}$$

 © 2014 SBMAC

logo integrando por partes e maiorando teremos,

$$I = \frac{l_o}{2}\left\{[v^1(l_o)]^2 + \alpha[\partial_x u^1(l_o)]^2\right\} \leq \gamma \int_o^{l_o} |xv^1\overline{\partial_x u^1}|dx + C\|U\|\|F\|.$$

Estimando o lado direito da desigualdade acima temos,

$$\begin{aligned} I &\leq C\|U\|\|F\| + \gamma l_o \left(\int_o^{l_o} |v^1|^2\right)^{1/2}\left(\int_o^{l_o} |\partial_x u^1|^2\right)^{1/2} \\ &\leq C\|U\|\|F\| + C_1\|U\|^{1/2}\|F\|^{1/2}\|\partial_x u^1\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Da estimativa anterior (5.15) temos,

$$I \leq C\|U\|\|F\| + C_1\|U\|^{1/2}\|F\|^{1/2}\left\{|u^1(l_o)|^2 + |\partial_x u^1(l_o)|^2\right\}$$

logo teremos a seguinte estimativa,

$$\frac{1}{2}I \leq C_2\|F\|\|U\| + C_3\|U\|^{1/2}\|F\|^{1/2}|u^1(l_o)|^2.$$

Utilizando a desigualdade de Gagliardo-Niremberg, teremos

$$|u^1(l_o)| \leq \|u^1\|_{L^\infty} \leq C\|u^1\|_{L^2}^{1/2}\|\partial_x u^1\|_{L^2}^{1/2} \leq C_\delta\|u^1\|_{L^2} + \delta\|\partial_x u^1\|_{L^2}. \tag{5.16}$$

Novamente da desigualdade anterior (5.16) obtemos a relação,

$$\begin{aligned} |\alpha\, u^1(l_o)\partial_x u^1(l_o)| &\leq \varepsilon_o|\partial_x u^1(l_o)|^2 + C_{\varepsilon_o}|u^1(l_o)|^2 \\ &\leq C\varepsilon_o\|U\|^2 + \varepsilon_o C\|U\|\|F\| + C(\varepsilon,\delta)\|u^1\|_{L^2} + \varepsilon_o\|\partial_x u^1\|_{L^2} \end{aligned}$$

onde $\delta < \varepsilon_o/C_{\varepsilon_o}$.

Escrevendo de forma mais simplificada temos,

$$\alpha\, u^1(l_o)\partial_x u^1(l_o) \leq C\varepsilon_o\|U\|^2 + \varepsilon_o C\|U\|\|F\| + \widetilde{C_\varepsilon}\|u^1\|_{L^2}^2 \tag{5.17}$$

Considere $\lambda = i\,\beta$ e substitua na relação (3.9) para obter

$$\begin{aligned} \beta^2\int_o^{l_o} |u^1|^2 dx &\leq 4\int_o^{l_o} |v^1|^2 dx + C\|F\|^2 \\ &\leq 4\|U\|\|F\| + C\|F\|^2 \end{aligned}$$

ou de maneira equivalente

$$\int_o^{l_o} |u^1|^2 dx \leq \frac{4}{\beta^2}[\|U\|\|F\| + C\|F\|^2]$$

e quando $\beta \to \infty$, segue que existe C_o tal que,

$$\|u^1\|_{L^2}^2 = \int_o^{l_o} |u^1|^2 dx \leq C_o\|U\|\|F\| + d_o\|F\|^2 \tag{5.18}$$

portanto

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^{l_o} |\partial_x u^1|^2 dx \leq \varepsilon_o C\|U\|^2 + C_\varepsilon\|U\|\|F\| + C_\varepsilon\|F\|^2$$

Utilizando a relação (5.14) obtemos

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^{l_o} |v^1|^2 + \alpha|\partial_x u^1|^2\, dx\right] \leq C_\varepsilon\|U\|\|F\| + \varepsilon C\|U\|^2 + C_\varepsilon\|F\|^2. \tag{5.19}$$

 © 2014 SBMAC

Multiplicando a relação (3.12) por $(x-L)\partial_x u^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{l_o}^{L}\left[|v^2|^2+\beta|\partial_x u^2|^2\right]\,dx &\leq \frac{L-l_o}{2}\left\{[v^2(l_o)]^2+\beta[\partial_x u^2(l_o)]^2\right\}+\|F\|\|U\| \quad (5.20)\\ &\leq C\left\{|\partial_x u^1(l_o)|^2+|v^1(l_o)|^2\right\}+C\|U\|\|F\|\\ &\leq C\int_o^{l_o}|\partial_x u^1|^2+|v^1|^2dx+C\|U\|\|F\|\\ &\leq C\varepsilon_o\|U\|^2+C_\varepsilon\|U\|\|F\|+C_\varepsilon\|F\|^2.\end{aligned}$$

Das equações (5.19) e (5.20) e levando em consideração a norma de U temos

$$\frac{1}{2}\|U\|^2\leq C\varepsilon_o\|U\|^2+C_\varepsilon\|U\|\|F\|+C_{\varepsilon_o}\|F\|^2$$

a seguir restringimos a constante $C\varepsilon_o<1/4$ e disto obteremos,

$$\frac{1}{8}\|U\|^2\leq C_\varepsilon^2\|F\|^2 \quad \text{e} \quad \|U\|\leq\widetilde{C_\varepsilon}\|F\|$$

de onde resulta,

$$\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}F\|\leq C\|F\|,\quad\forall\quad\beta\in\mathbb{R},$$

logo,

$$\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}\|\leq C,\quad\forall\quad\beta\in\mathbb{R},$$

existe o decaimento exponencial. □

Referências

[1] Prüss, J.; *On the Spectrum of C_0-semigroups*, Trans. of the American Mathematical Society (2), vol. 284, pp. 847-857, (1984).

[2] Gearhart, L.; *Spectral Theory for the Contractions Semigroups on Hilbert Spaces*, Trans. of the American Mathematical Society (1), vol. 236, pp. 385-349, (1978).

[3] Goldstein, J. A.; *Semigroups of Linear Operator and Applications*, Oxford University Press, (1985).

[4] Huang, F.; *Characteristic Conditions for Exponential Stability of the Linear Dynamical Systems in Hilbert Spaces*, Annals of Differential Equations, vol 1 (1), pp. 43-56, (1985).

[5] Dautray, R. & Lions, J.-L.; *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 1,2 and 4, Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[6] Athanasiadis, C. & Stratis, I. G.; *On Some Elliptic Transmission Problems*, Annales Polonici Mathematici, LXIII.2, (1996).

[7] Neerven, J. V.; *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Operator Theory; vol 88. Berlin, Birkhäuser, (1996).

[8] Muñoz Rivera, J. E. & Vila Bravo, J. C.; *Asymptotic Stability of Semigroups Associated to the Linear Weak Dissipative Systems*, Mathematical and Computer Modelling, vol. 40, (4), pp. 387-392, (2004).

[9] Liu, Z. & Liu, Z.; *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, CRC Research Notes Mathematics, 398 (3), Chapman & Hall, (1999)

[10] Chen, S. & Liu, K. & Liu, Z.; *Spectrum and Stability Elastic System with Global or Local Kelvin-Voigt Damping*, SIAM Journal of Applied Mathematics Vol. 59(2), pp. 651-668,(1998).

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0004 © 2014 SBMAC