Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Solução global das equações de Navier-Stokes em domínios finos com diferentes condições de fronteira

Felipe C. Minuzzi
Universidade Federal de Santa Maria
Programa de Pós Graduação em Matemática
97105-900, Cidade Universitária, Santa Maria, RS
E-mail: feminuzzi@hotmail.com

João Paulo Lukaszczyk
Universidade Federal de Santa Maria
Departamento de Matemática
97105-900, Cidade Universitária, Santa Maria, RS
joaopaulolukas@yahoo.com.br

Resumo: *A forma clássica do sistema de equações de Navier-Stokes, a qual deriva do princípio de conservação de massa e momento linear, descreve o movimento de um fluido homogêneo em um domínio bi ou tri dimensional sujeito a um campo de forças externas. Neste trabalho, busca-se soluções para tal sistema em domínios tridimensionais finos e encontra-se resultados com relação a existência e unicidade, bem como solução global no tempo.*

Palavras-chave: *Equações de Navies-Stokes, Domínios Finos, Solução Global*

1 Introdução

O sistema de equações de Navier-Stokes é um importante problema dentro da Matemática, apesar de ainda estar em aberto e não ter sido encontrada solução clássica. Estas equações, as quais descrevem o movimento de um fluido homogêneo em um domínio bi ou tri dimensional sujeito a um campo de forças externas, possuem aplicações em ramos como Física, Meteorologia, Mecânica dos Fluidos, entre outros, e restringindo-se a domínios finos, isto é, quando uma dimensão é pequena comparada com as outras, aplica-se em Mecânica dos Sólidos, Fisiologia, Geofísica, Dinâmica dos Oceanos, etc. O objetivo deste trabalho é encontrar soluções globais no tempo em espaços do tipo Sobolev do sistema de Navier-Stokes em domínios tridimensionais finos, considerando uma combinação entre as condições de fronteira de *Dirichlet*, fronteira livre e periódica. Para tal, usa-se resultados clássicos de [2] e [3], bem como adaptações destes para domínios finos, encontrados em [1], [4] e [5].

2 Formulação Matemática

As equações de Navier-Stokes, deduzidas a partir do princípio de conservação da massa e do momento, têm sua formulação clássica, com condições de fronteira de *Dirichlet*, dadas por:

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u + \nabla p = f & ; \quad \text{em} \ \ \Omega_\epsilon \times (0,T) \\ \mathbf{div} u = 0 & ; \quad \text{em} \ \ \Omega_\epsilon \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & ; \quad \text{em} \ \ \Omega_\epsilon \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & ; \quad \forall \ x \in \partial\Omega_\epsilon, \forall \ t \in (0,T) \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio tridimensional fino tal que $\Omega_\epsilon = \omega \times (0,\epsilon)$, com $\epsilon \in (0,1)$ e $\omega \subset \mathbb{R}^2$ suave, $T > 0$, $f : \Omega_\epsilon \times (0,T) \to \mathbb{R}^3$ é a força externa, $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^3$ é o campo de velocidades, $p : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ é a pressão, $\mu > 0$ é a viscosidade do sistema e u_0 é a velocidade inicial dada. Neste sistema de equações, a condição $\mathbf{div} u = 0$ representa a incompressibilidade do fluido.

As condições para a fronteira $\partial\Omega_\epsilon$ são combinações entre as condições de fronteira de *Dirichlet*, fronteira livre e periódica. No que segue, $\partial\Omega_\epsilon = \Gamma_t \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l$, onde

$$\Gamma_t = \omega \times \{\epsilon\}, \quad \Gamma_b = \omega \times \{0\}, \quad \text{e} \quad \Gamma_l = \partial\omega \times (0,\epsilon).$$

Mais precisamente, tem-se

1. A condição de fronteira livre em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ e periódica em Γ_l, denotada por **(FP)**. Considera-se, neste caso, $\omega = (0,l_1) \times (0,l_2)$, $l_1, l_2 > 0$,

$$u_3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_t \cup \Gamma_b.$$

   Além disso u_i é periódica nas direções x_1 e x_2 com período l_1 e l_2, respectivamente, para $i = 1,2,3$. Ainda,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u_0^j(x)dx = \int_{\Omega_\epsilon} f_j(x,t)dx = 0, \quad j = 1,2.$$

2. A condição de fronteira livre em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ e de Dirichlet em Γ_l, denotada por **(FD)**. Neste caso, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado de classe C^2,

$$u_3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_t \cup \Gamma_b, \quad \text{e} \quad u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_l.$$

3. A condição de fronteira livre em $\partial\Omega_\epsilon$, denotada por **(FF)**. Neste caso, se $\mathbf{n}$ é o vetor normal apontado para fora de $\partial\Omega_\epsilon$, então

$$u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathrm{rot} u \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_\epsilon.$$

4. A condição periódica em $\partial\Omega_\epsilon$, denotada por **(PP)**. Neste caso, $\omega = (0,l_1) \times (0,l_2)$, $l_1, l_2 > 0$ e $u(x,t)$ é periódica em todo Ω_ϵ. Além disso,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u_0(x)dx = \int_{\Omega_\epsilon} f(x,t)dx = 0.$$

5. A condição de Dirichlet em $\partial\Omega_\epsilon$, denotada por **(DD)**, ou seja,

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_\epsilon.$$

6. A condição de Dirichlet em $\Gamma_t \cup \Gamma_b$ e periódica em Γ_l, denotada por **(DP)**. Neste caso,

$$u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_t \cup \Gamma_b$$

   e u é periódica em Γ_l. Além disso,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u_0^3 dx = \int_{\Omega_\epsilon} f_3(x,t)dx = 0.$$

Mais ainda, os espaços funcionais V_ϵ e H_ϵ, definidos como o fecho de $\gamma = \{u \in C_c^\infty(\Omega_\epsilon); \mathbf{div} u = 0\}$ em $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ e $L^2(\Omega_\epsilon)$, respectivamente, sofrem algumas alterações dependendo da condição de fronteira a ser considerada:

1. $H_{DP} = H_{FP} = \Big\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0;\ u_3(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_t \cup \Gamma_b, \int_{\Omega_\epsilon} u_\alpha(x,t)dx = 0$ e $\ u \mid \Gamma_\alpha = u \mid \Gamma_{\alpha+3};\ \alpha = 1,2 \Big\}$, onde Γ_α e $\Gamma_{\alpha+3}$ são as faces $x_\alpha = 0$ e $x_\alpha = l_\alpha$ de $\partial\Omega_\epsilon$, respectivamente. Esta condição indica a periodicidade da função u na direção x_α.

2. $H_{DD} = H_{FF} = H_{FD} = \Big\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0;\ u \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon \Big\}$,

3. $H_{PP} = \Big\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0;\ \int_{\Omega_\epsilon} u(x,t)dx = 0 \ \text{ e } \ u_j \mid \Gamma_j = u_j \mid \Gamma_{j+3};\ j = 1,2,3 \Big\}$.

Com relação ao espaço V_ϵ, define-se como segue:

1. $V_{FP} = \{ u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon) \cap H_{FP};\ u \mid \Gamma_\alpha = u \mid \Gamma_{\alpha+3} \}$;
2. $V_{FD} = \{ u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon) \cap H_{FD};\ u = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_l \}$;
3. $V_{PP} = \{ u \in \mathbb{H}^1_{per}(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0 \}$;
4. $V_{DD} = \{ u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega_\epsilon);\ \mathbf{div} u = 0 \}$;
5. $V_{FF} = \{ u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\epsilon) \cap H_{FF};\ u \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega_\epsilon \}$

Observação: As normas relativas aos espaços V_ϵ e H_ϵ são denotadas por $||\ .\ ||_\epsilon$ e $|\ .\ |_\epsilon$, respectivamente.

3 Métodos

Inicialmente, para garantir os resultados a serem demonstrados, utiliza-se dois importantes operadores, a saber, $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$, os quais serão usados para a formulação fraca das equações de Navier-Stokes.

Definição 3.1 *Seja $\phi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ uma função escalar. O operador média integral na direção fina é definido por:*

$$\begin{aligned} M_\epsilon : L^2(\Omega_\epsilon) &\longrightarrow L^2(\Omega_\epsilon) \\ \phi &\longmapsto M_\epsilon \phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \phi(x_1, x_2, s) ds. \end{aligned} \tag{2}$$

Define-se, também, o operador N_ϵ por

$$N_\epsilon \phi = \phi - M_\epsilon \phi.$$

O operador $\tilde{M}_\epsilon$ é definido para funções $u = (u_1, u_2, u_3)$ tal que $u_i \in L^2(\Omega_\epsilon),\ i = 1,2,3$, isto é,

$$u \longmapsto \tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3), \tag{3}$$

bem como $\tilde{N}_\epsilon u = u - \tilde{M}_\epsilon u$.

Dependendo da condição de fronteira, tem-se:

(i) Para (FF), (FP) e (FD), $\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, 0)$.

(ii) Para (PP), $\tilde{M}_\epsilon u = (M_\epsilon u_1, M_\epsilon u_2, M_\epsilon u_3)$.

(iii) Para (DD) e (DP), $\tilde{M}_\epsilon u = 0$.

O próximo resultado, com relação aos operadores definidos acima, será utilizado para as estimativas *a priori* de $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$, e independe da condição de fronteira escolhida.

Teorema 3.1 *Sejam $u, v \in H^1(\Omega_\epsilon)$. Então:*

(i) $\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \tilde{N}_\epsilon u \cdot \nabla \tilde{M}_\epsilon v dx = 0$

(ii) $|u|_\epsilon^2 = \left|\tilde{M}_\epsilon u\right|_\epsilon^2 + \left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon^2$ *e* $||u||_\epsilon^2 = \left|\left|\tilde{M}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2 + \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2$

(iii) Se $v \in V_\epsilon$ então $\tilde{M}_\epsilon v \in V_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon v \in V_\epsilon$

(iv) $b_\epsilon(u, u, \tilde{M}_\epsilon v) = b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon v)$ *e*
$b_\epsilon(u, u, \tilde{N}_\epsilon v) = b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{M}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v) + b_\epsilon(\tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon u, \tilde{N}_\epsilon v)$,
onde $u, v \in V_\epsilon$.

(v) Para todo $u \in D(A_\epsilon)$, tem-se

$$\Delta \tilde{N}_\epsilon u = \tilde{N}_\epsilon \Delta u \quad e \quad \Delta \tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon \Delta u$$

Aqui, b_ϵ é a forma trilinear dada por $b_\epsilon(u, v, w) = (u \cdot \nabla v, w)_{L^2(\Omega_\epsilon)}$ e A_ϵ é o Operador de Stokes, o qual comuta com os operadores $\tilde{M}_\epsilon$ e $\tilde{N}_\epsilon$, isto é,

$$A_\epsilon \tilde{M}_\epsilon u = \tilde{M}_\epsilon A_\epsilon u \quad \text{e} \quad A_\epsilon \tilde{N}_\epsilon u = \tilde{N}_\epsilon A_\epsilon u.$$

Agora, serão enunciados resultados para desigualdades clássicas em domínios finos. Tal ferramenta torna-se importante para conhecer a exata dependência das constantes que aparecem em desigualdades do tipo Sobolev com relação à espessura do domínio. No que segue, usa-se versões apropriadas das desigualdades de *Poincaré*, de *Agmon* e *Ladyzhenskaya*, entretanto, serão apenas enunciadas aquelas que envolvem o objetivo do trabalho.

Lema 3.1 *Para qualquer $u \in V_\epsilon$, vale que*

$$\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_\epsilon \leq \epsilon \left|\frac{\partial \tilde{N}_\epsilon u}{\partial x_3}\right|_\epsilon \tag{4}$$

Lema 3.2 (Desigualdade Anisotrópica de Agmon para Domínios Finos) *Existe uma constante positiva $c_0(\omega)$, que não depende de ϵ, tal que, para toda $u \in H^2(\Omega_\epsilon)$,*

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} &\leq c_0(\omega)\, |u|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^{1/4} \left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \frac{1}{\epsilon^2}|u|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right)^{1/4} \\ &\times \prod_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} + |u|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right)^{1/4} \end{aligned}$$

Combinando os resultados acima, tem-se:

Lema 3.3 *Existe uma constante positiva $c_0(\omega)$, que não depende de ϵ, tal que, para toda $u \in D(A_\epsilon)$,*

$$\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_{L^\infty(\Omega_\epsilon)} \leq c_0(\omega) \left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^{1/4} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial \tilde{N}_\epsilon u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \right)^{3/4} \tag{5}$$

A próxima desigualdade decorre da Desigualdade Anisotrópica de Ladyzhenskaya.

Lema 3.4 *Existe uma constante positiva c_0, independente de ϵ, tal que*

$$\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|_{L^6(\Omega_\epsilon)}^2 \leq c_0 \left|\left|\tilde{N}_\epsilon u\right|\right|_\epsilon^2. \tag{6}$$

4 Resultados

Os primeiros dois resultados aqui apresentados são clássicos na teoria de Navier-Stokes, conforme [4].

Teorema 4.1 *Seja $f \in L^2(0, T, V_\epsilon^{'})$ e $u_0 \in H_\epsilon$. Então existe*

$$u \in L^2\left(0, T, V_\epsilon\right) \cap L^\infty\left(0, T, H_\epsilon\right) \tag{7}$$

solução fraca do sistema (1).

Uma solução mais regular (a qual denomina-se solução forte) é fornecida pelo seguinte resultado:

Teorema 4.2 *Dados $u_0 \in V_\epsilon$ e $f \in L^\infty(0, +\infty, H_\epsilon)$, existem $T_\epsilon = T_\epsilon(\Omega_\epsilon, \mu, u_0, f) > 0$ e u_ϵ única solução de (1) tal que*

$$u_\epsilon \in L^2\left(0, T_\epsilon, D(A_\epsilon)\right) \cap L^\infty\left(0, T_\epsilon, V_\epsilon\right) \tag{8}$$

Neste trabalho, demonstra-se que dependendo das condições de fronteira e de uma relação entre os dados iniciais u_0 e f, tem-se a existência global no tempo para a solução do sistema de equações de Navier-Stokes. Mais precisamente, seja $R(\epsilon)$ uma função monótona positiva satisfazendo

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^q R^2(\epsilon) = 0, \tag{9}$$

para algum $q \leq 1$.

O resultado de existência global dependerá das condições de fronteira, isto é:

1. Para (DD) e (DP), toma-se $q = 1$;
2. Para (FF) e (FP), toma-se $q < 1$.

A partir daí, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 4.3 *Sejam $f \in L^\infty(0, +\infty, H_\epsilon)$, $u_0 \in V_\epsilon$ tais que*

$$\left|A_\epsilon^{1/2} u_0\right|_\epsilon^2 + |f|_\epsilon^2 \leq R^2(\epsilon) \tag{10}$$

para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$. Então o tempo máximo de existência da solução forte u_ϵ de (1) satisfaz

$$T_\epsilon = +\infty. \tag{11}$$

Assim, por exemplo, para as condições de *Dirichlet*, para uma solução forte do problema (1) ser global no tempo, deve-se ter

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon R^2(\epsilon) = 0. \tag{12}$$

5 Conclusão

O estudo da solução global no tempo para as equações de Navier-Stokes ainda é um problema em aberto para domínios tri dimensionais e sua compreensão é de interesse em diversas áreas das Ciências Exatas. Neste trabalho foi apresentado resultados para que essa questão seja respondida, quando restringe-se a domínios finos. Tendo como hipótese uma relação entre os dados iniciais e dependendo das condições de fronteira consideradas, demonstra-se que o tempo de existência da única solução forte do sistema é máximo.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0008

Referências

[1] G. Raugel e G. Sell, Equations de Navier-Stokes dans des domaines minces en dimension trois: régularité globale, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1*, 309 (1989) 299-303.

[2] R. Temam, "Navier-Stokes Equations", North-Holland Publishing Company, New York, 1979.

[3] R. Temam, "Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis", SIAM, Philadelphia, 1995.

[4] R. Temam e M. Ziane, Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary condition, *Advances in Differential Equations 1*, 4 (1996) 499-546.

[5] M. Ziane, On the two-dimensional Navier-Stokes equations with the free boundary condition, *Applied Mathematics and Optimization 38*, 1 (1998) 1-19.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0008