

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Modelagem Matemática e Simulação Computacional da Secagem Contínua e Intermitente de Sólidos Elipsoidais

Célia Maria R. Franco<sup>1</sup>

Centro de Educação e Saúde, Unidade Acadêmica de Física e Matemática, UFCG, Cuité, PB

Antonio Gilson B. de Lima <sup>2</sup>

Centro de Ciências e Tecnologia, Unidade Acadêmica de Engenharia Mecânica, UFCG, Campina Grande, PB

**Resumo.** Neste estudo estimou-se a variação da umidade de sólidos elipsoidais prolatos durante o processo de secagem contínua e intermitente com uma pausa. Para tanto foi proposto um modelo matemático que considera a equação de difusão bidimensional em coordenadas cilíndricas com propriedades termo físicas constantes. O modelo foi resolvido através do método integral baseado em Galerkin. Foi desenvolvido um código computacional na plataforma Mathematica para implementação do método e realização das simulações. Para as condições investigadas neste trabalho, verificou-se que a secagem intermitente reduz o tempo de processo quando comparada com a secagem contínua, e conseqüentemente, reduz o consumo de energia.

**Palavras-chave.** Modelagem Matemática, Equação de Difusão, Método GBI, Elipsoide Prolato.

### 1 Introdução

Secagem é um processo que envolve transferência de calor e massa (umidade) entre um produto higroscópico e o ar de secagem e está presente em vários processos de interesse tecnológico, incluindo processamento de alimentos e armazenamento de grãos. No caso de alimentos, a água é removida do material úmido até um nível onde a deterioração provocada por microrganismos possa ser minimizada. O processo de secagem envolve elevado consumo energético e consome cerca de 20 a 25% de energia utilizada pela indústria de processamento de alimentos. Neste sentido, a técnica de secagem intermitente é considerada promissora para melhorar a qualidade dos produtos secos e a eficiência energética do processo como reportado em [6].

No estudo da secagem intermitente, o modelo de difusão líquida em sua maioria é aplicado de forma simplificada (unidimensional) a corpos com geometrias bem conhecidas (cilindros, esferas e paralelepípedos), negligenciando o período de têmpera. Poucos são os

---

<sup>1</sup>celiarufino@ufcg.edu.br

<sup>2</sup>antonio.gilson@ufcg.edu.br

trabalhos científicos que utilizam a geometria elipsoidal e cujo objetivo principal seja a otimização do processo de secagem intermitente [7, 9].

Dentre os métodos reportados na literatura para obter solução de equações diferenciais parciais, o método integral baseado em Galerkin (método GBI) tem sido usado para obter solução analítica aproximada da equação de difusão para geometrias arbitrárias [2, 3, 8, 10]. Em [2] os autores usaram o método GBI para simular secagem intermitente de grãos de arroz em casca, negligenciando o período de têmpera. Em [3] o modelo de difusão foi aplicado para descrever secagem contínua de grãos de arroz em casca em leito fixo. Para tanto, o grão de arroz foi representado por um elipsoide prolato e a equação de difusão foi resolvida via método GBI, com condição de contorno de Dirichlet.

Neste trabalho, a solução da equação de difusão com condição de contorno de equilíbrio (condição de contorno de Dirichlet), obtida via método GBI, foi utilizada para prever o transporte de umidade em elipsoides de revolução ao longo do processo de secagem contínua e intermitente. O modelo desenvolvido inclui o período de têmpera (período de repouso) e permite simular a distribuição de umidade no interior do elipsoide. Desta forma, pretende-se melhorar a compreensão do mecanismo e estabelecer estratégias para a otimização do processo de secagem intermitente de sólidos elipsoidais prolatos, que é uma forma tão comum na natureza.

## 2 Modelagem matemática

No processo de secagem, o transporte de massa (umidade) foi governado pela equação de difusão bidimensional escrita em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial M^*}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial M^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial M^*}{\partial z} \right), t > 0, \quad (1)$$

onde  $M^* = \frac{M - M_{eq}}{M_0 - M_{eq}}$ ,  $M$  denota o teor de umidade,  $M_0$  denota o teor de umidade inicial,  $M_{eq}$  é o teor de umidade de equilíbrio,  $D$  a difusividade de massa,  $r$  e  $z$  são as coordenadas da posição.

Seja  $\Omega$  o interior do elipsoide prolato representado na Figura 1 e  $S$  a sua fronteira. As seguintes hipóteses foram consideradas na modelagem matemática: (a) o sólido é homogêneo e isotrópico; (b) as propriedades termo físicas são constantes ao longo do processo; (c) o sólido é simétrico em relação ao plano  $z = 0$ ; (d) as condições de contorno são homogêneas.

O problema matemático consiste em obter uma solução  $M^*(r, z, t)$  da equação (1) com a condição inicial e a condição de contorno homogênea dadas, respectivamente, por:

$$M^* = 1 \quad \text{em } t = 0 \quad (2)$$

$$M^*|_S = 0, \quad t > 0 \quad (3)$$

onde o subscripto  $S$  denota a superfície do elipsoide prolato.

Procura-se solução da equação (1) da seguinte forma [4]:

$$M^*(r, z, t) = \sum_{n=1}^N C_n \Psi_n(r, z) \exp(-\gamma_n t) \quad (4)$$

onde  $\Psi_n(r, z)$  é escolhida satisfazendo a condição de contorno homogênea (3) de modo que (4) seja solução da equação (1),  $\gamma_n$  é o  $n$ -ésimo autovalor e  $C_n$  são constantes a serem determinadas.

Substituindo (4) na equação (1), para cada  $n = 1, \dots, N$  obtém-se:

$$L[\Psi_n] = \nabla^2 [D\Psi_n(r, z)] + \gamma_n \Psi_n(r, z) = 0 \quad (5)$$

com  $\Psi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo a condição de contorno homogênea.

Portanto, a solução transiente (4) conduz a um problema de autovalores. As funções  $\Psi_n(r, z)$  são selecionadas de acordo com o método de Galerkin [1, 4] da seguinte forma:

$$\Psi_n(r, z) = \sum_{j=1}^N d_{nj} f_j(r, z) \quad (6)$$

onde  $d_{nj}$  são constantes a serem determinadas e as  $N$  funções de base são escolhidas em um conjunto completo  $f_j(r, z)$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  de funções linearmente independentes,  $f_j$  definidas em  $\Omega$ , satisfazendo a condição de contorno homogênea (3). Para a geometria elipsoidal, as funções de base que satisfazem a condição de contorno de Dirichlet homogênea são dadas em [4] da seguinte forma:  $f_j(r, z) = \varphi r^p z^q$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  e  $p, q = 0, 2, 4, 6, 8, \dots, N_{pq}$ , onde  $\varphi = 1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$ . Neste trabalho, dezesseis funções de base foram utilizadas que corresponde a  $N_{pq} = 6$ .

Os coeficientes  $d_{nj}$  e os autovalores  $\gamma_n$  são determinados de modo que  $L[\Psi_n]$  seja ortogonal às primeiras  $N$  funções do conjunto completo. Tem-se, portanto,

$$\int_{\Omega} L \left[ \sum_{j=1}^N d_{nj} f_j(r, z) \right] f_i(r, z) d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Uma vez que os autovalores  $\gamma_n$  são determinados, os autovetores  $d_n$  associados são obtidos. Para cada autovalor, obtém-se de (7) um sistema de equações algébricas cuja solução são as componentes  $d_{n1}, d_{n2}, \dots, d_{nN}$  do autovetor associado.

Após o cálculo dos autovalores  $\gamma_n$  e autovetores  $d_n$ , as autofunções  $\Psi_n$  são conhecidas e a solução (4) estará completa com o cálculo dos coeficientes  $C_n$ . Para isto, aplica-se a condição inicial  $M^*(r, z, 0) = 1$  na equação (4). Analogamente a solução exata e expansão em série de Fourier, multiplica-se ambos os lados da equação resultante por  $f_i$  e integrando sobre  $\Omega$  tem-se:

$$\int_{\Omega} f_i(r, z) d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \sum_{n=1}^N C_n \Psi_n(r, z) \right] f_i(r, z) d\Omega. \quad (8)$$

Repetindo o processo para cada função de base  $f_j$ ,  $i = 1, \dots, N$  obtém-se de (8) um conjunto de  $N$  equações algébricas lineares que permite calcular os valores de  $C_n$ .

O teor de umidade médio adimensional foi calculado como segue:

$$\bar{M}^*(t) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} M^* d\Omega \quad (9)$$

onde  $V$  é o volume do sólido ilustrado na Figura 1.

Na secagem intermitente o sólido sofre a ação do calor, durante pequeno intervalo de tempo (secagem contínua), em seguida passa por um período de repouso (período de têmpera) sem contato com o ar aquecido e depois é submetido novamente ao processo de secagem contínua. Para simular a distribuição de umidade no interior do sólido durante o período de têmpera, duas condições foram admitidas: (a) A distribuição de concentração no interior do sólido é conhecida no início do período de repouso; e (b) A superfície do sólido é considerada impermeável, isto é, a concentração média no sólido é constante durante o período de repouso. Em termos de equação matemática, a superfície do sólido será considerada impermeável (isolada) aplicando-se a condição de contorno de Neumann homogênea, com fluxo nulo prescrito na superfície do elipsoide, de tal forma que

$$\left. \frac{\partial M}{\partial \vec{n}} \right|_S = 0 \quad (10)$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor unitário normal exterior à superfície  $S$  do elipsoide prolato e  $M$  denota o teor de umidade.

Assim, para descrever a distribuição de umidade, durante o período de pausa, obteve-se a solução da equação (1) com a condição de contorno (10) e a nova condição inicial, que corresponde a distribuição de umidade no final do primeiro período de secagem contínua fornecida pela solução da equação (1) com condição de contorno de Dirichlet. Neste caso, utilizou-se as funções de base dadas em [5] da seguinte forma:  $f_j = r^p z^q (B_1 r^2 + b_2 z^2 + B_3)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  e  $p, q = 0, 2, 4, 6, 8, \dots, N_{pq}$ , onde  $B_1, B_2$  e  $B_3$  são constantes a serem determinadas impondo a condição de contorno homogênea (10).

### 3 Resultados e discussão

A validação do modelo e do código computacional foi feita por comparação com resultados disponíveis na literatura oriundos de soluções também obtidas via método GBI [4], bem como a partir da solução da equação de difusão em coordenadas esferoidais prolatas, via método de separação de variáveis [7]. Considerou-se o tempo de têmpera igual a zero (secagem contínua), pressupondo uma distribuição de umidade inicial uniforme e o coeficiente de difusão  $D$  constante. O teor de umidade adimensional simulado é apresentado em função do número de Fourier (tempo adimensional)  $Dt/a^2$ . Os dados reportados na literatura foram digitalizados usando o software xyExtract Graph Digitizer.

Na Figura 2, os resultados dos teores de umidade no centro de um elipsoide com razão de aspecto  $b/a = 1,1$  ( $a = 1,0\text{cm}$ ) obtidos neste trabalho com o método GBI são comparados aos resultados da solução da equação de difusão em coordenadas esferoidais

prolatas usando o método de separação de variáveis e condição de contorno de primeira espécie apresentada em [7]. Neste caso, o coeficiente de difusão usado na simulação foi  $D = 1,22 \times 10^{-5} \text{cm}^2/\text{s}$ , o mesmo utilizado em [7]. Observa-se uma boa concordância entre os valores do teor de umidade no centro do elipsoide considerado quando comparado com os dados reportados na literatura, o que confirma a consistência do método utilizado para resolver o modelo representado pelas equações (1) a (3). O aumento, não realista, do teor de umidade no centro do elipsoide nos instantes iniciais do processo na Figura 2 são inconvenientes da simulação numérica devido ao número de funções de base considerado para reduzir o tempo de processamento computacional. No entanto, estas falhas não prejudicam a análise do processo, visto que a solução converge rapidamente para instantes de tempo maiores.

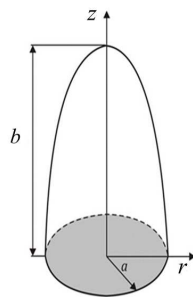


Figura 1: Elipsoide prolato no sistema de coordenadas cilíndricas  $z \geq 0$ .

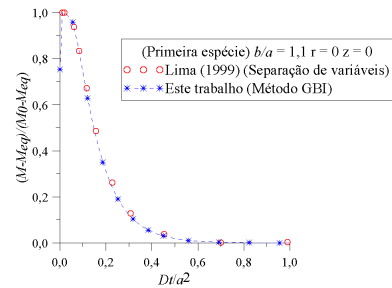


Figura 2: Comparação entre os resultados obtidos em [7] e os obtidos neste trabalho para elipsoide de razão de aspecto  $b/a = 1, 1$ .

Testes de secagem contínua e intermitente foram simulados para diferentes condições operacionais. Considerou-se sólidos com razão de aspecto  $b/a = 1, 1; 2, 0$  e  $5, 0$ , mantendo  $a = 1, 0 \text{cm}$  em todos os casos e coeficiente de difusividade arbitrário  $D = 1, 0 \times 10^{-5} \text{cm}^2/\text{s}$ . Comparando os resultados dos teores de umidade simulados para as três geometrias, verificou-se que a razão de aspecto do elipsoide tem uma influência direta no processo de secagem. Quanto maior for a relação área/volume, menor é o tempo necessário para a umidade do sólido atingir o seu valor de equilíbrio.

O modelo foi usado para estudar o efeito do aumento do tempo de têmpera na perda de umidade de elipsoides com razão de aspecto  $b/a = 1, 1; 2, 0$  e  $5, 0$ , ao longo do processo de secagem intermitente com uma pausa. Eliminando-se o período de têmpera e comparando com a curva de secagem contínua, observou-se, para os três sólidos estudados, que a taxa de secagem é diretamente proporcional ao tempo de têmpera. Quanto maior o tempo de têmpera considerado, maior é a taxa de secagem pós-têmpera, o que está de acordo com resultados experimentais de secagem intermitente de produtos agrícolas reportados na literatura [2, 11]. A Figura 3 mostra os resultados dos teores de umidade preditos para um elipsoide de razão de aspecto  $b/a = 2, 0$ , variando o tempo de têmpera.

A partir da simulação computacional da distribuição do teor de umidade no interior do elipsoide, durante o período de têmpera, verificou-se que, ao longo do tempo, o teor de

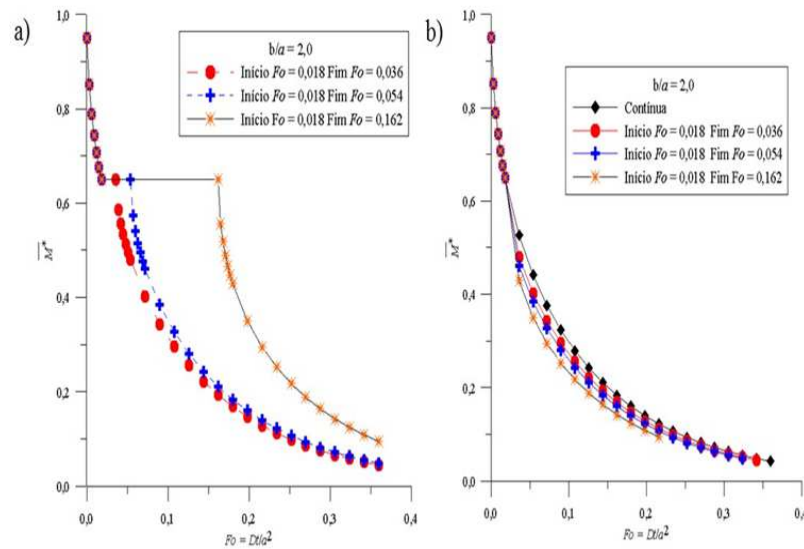


Figura 3: Comparação entre os teores de umidade preditos ao longo dos processos de secagem contínua e intermitente com uma pausa, para um elipsoide com razão de aspecto 2,0: (a) incluindo o período de têmpera; e (b) excluindo o período de têmpera.

umidade diminuiu na parte central da seção do elipsoide e aumentou na região periférica, para os três sólidos estudados. A água acumulada na superfície do sólido, durante o período de têmpera, facilita a secagem no período pós-têmpera e, conseqüentemente, reduz o tempo de processo. A técnica de secagem intermitente minimiza gradientes térmicos e hídricos no interior do material e, conseqüentemente, reduz possíveis danos estruturais (trincas, deformações, etc.).

## 4 Conclusões

Foi mostrado que a secagem contínua e intermitente de sólidos elipsoidais pode ser analisada com a solução da equação de difusão combinando as condições de contorno de Dirichlet e Neumann. A partir da simulação computacional realizada é possível desenvolver estratégias para diminuir de forma significativa o tempo de processo, que pode ser útil para vários produtos com forma geométrica semelhante a um elipsoide, tais como: grãos de arroz e trigo. O modelo de difusão proposto é capaz de simular a distribuição de umidade dentro do sólido em qualquer instante, fornecendo informações sobre o que realmente acontece com o produto durante os períodos de interrupção do ar quente. Além disso, o método GBI é um método analítico para obter solução aproximada, com a vantagem de não

ser necessário escrever a equação em coordenadas esféricas prolatas como acontece no método de separação de variáveis, facilitando demasiadamente a obtenção dos resultados.

## Agradecimentos

Os autores agradecem às agências brasileiras de pesquisa CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por apoiar este trabalho e também aos autores das referências citadas que ajudaram na melhoria da qualidade.

## Referências

- [1] J. V. Beck, K. D. Cole, A. Haji-Sheikh, and B. Litkouhi. *Heat conduction using green's functions*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1992.
- [2] A. Cihan, K. Kahveci, O. Hacıhafizoglu, and A. G. B. Lima. A diffusion based model for intermittent drying of rough rice, *Heat Mass Transfer*, 44:905-911, 2008.
- [3] C. M. R. Franco, A. G. B. Lima, J. V. Silva, and A. G. Nunes. Applying liquid diffusion model for continuous drying of rough rice in fixed bed, *Defect and Diffusion Forum*, 369:152-156, 2016. DOI:10.4028/www.scientific.net/DDF.369.152.
- [4] A. Haji-Sheikh, and M. Mashena. Integral Solution of Diffusion Equation: Part 1 - General Solution, *Journal of Heat Transfer*, 109:551-556, 1987.
- [5] A. Haji-Sheikh, and R. Lakshminarayanan. Integral Solution of Diffusion Equation: Part 2 - Boundary Conditions of Second and Third Kinds, *Journal of Heat Transfer*, 109: 557-562, 1987.
- [6] C. Kumar, M. A. Karim, and M. U. H. Joardder. Intermittent drying of food products: A critical review, *Journal of Food Engineering*, 121:48-57, 2014.
- [7] A. G. B. Lima, Fenômeno de difusão em sólidos esféricos prolatos. Estudo de caso: secagem de bananas. Tese de Doutorado, FEM/ UNICAMP, 1999.
- [8] A. G. B. Lima, J. M. P. Q. Delgado, S. R. F. Neto, and C. M. R. Franco, Intermittent drying: fundamentals, modeling and applications. *Drying and Energy Technologies*, Springer, volume 63, chapter 2, pages 19-41, 2015. DOI 10.1007/978-3-319-19767-8.
- [9] D. R. Lima, S. N. Farias, and A. G. B. Lima. Mass transport in spheroids using the Galerkin method, *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, 21:667-680, 2004.
- [10] F. R. Payne, C. C. Corduneanu, A. Haji-Sheikh, and T. Huang. *Integral methods in Science and engineering*, Hemisphere, New York, 1986.
- [11] Z. Yang, E. Zhu, Z. Zhu, J. Wang, and S. Li. A comparative study on intermittent heat pump drying process of Chinese cabbage (*Brassica campestris* L. ssp) seeds, *Food and Bioproducts Processing*, 91:381-388, 2013.