Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Solução Generalizada da EDP p-Laplace: $\mathbf{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0}$

Maria Lewtchuk Espindola,
Depto de Matemática, DM/CCEN, UFPB,
58051-970, João Pessoa, PB
E-mail: mariia@mat.ufpb.br.

28/09/2013

Resumo: Ampliamos o conjunto de soluções da EDP $(u_x)^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + (u_y)^2 u_{yy} = 0$*, obtendo uma solução generalizada. Com esse intuito, utilizamos o método de Monge para EDPs de segunda ordem uniformes, que as reduz ao sistema de Monge. O qual resulta na EDP* $f(p,q) = 0$*, que através do nosso método determinamos uma solução dependente de uma função arbitrária (solução generalizada) da EDP p-harmônica.*

Palavras-chave: *EDP p-harmônica (ou p-Laplace), EDPs não lineares, Método de Monge, Solução generalizada, Formas diferenciais Pfaffianas, Transformada de Legendre.*

1 Introdução

Na extensão do método desenvolvido anteriormente em Espindola [3, 4] (resumido no apêndice), podemos obter soluções para EDPs de segunda ordem, desde que estas possam ser transformadas em equações diferenciais parciais do tipo $F(f(x)p, h(y)q) = G(x)$, onde $p = u_x$, $q = u_y$ e $u = u(x, y)$. Esse método é desenvolvido utilizando uma transformação semelhante a de Legendre e o teorema para formas diferenciais Pfaffianas que fornece a condição para que estas se tornem integráveis. Como a solução obtida depende de uma função arbitrária, logo através desse método obtemos sempre uma solução geral da EDP de primeira ordem.

A equação

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0 \tag{1}$$

é uma equação diferencial parcial p-harmônica (ou p-Laplace) definida em $\Re^2$, para $p \to \infty$ foi estudada por G. Aronsson[1, 2]. As soluções obtidas para esta equação diferencial parcial trazem informações importantes em diversas situações desde esta é uma equação diferencial parcial não linear.

No caso as funções $u = u(x, y)$ são as soluções de viscosidade ∞-harmônicas de $\Delta_\infty u = 0$, onde

$$\Delta_\infty u = |\nabla u|^{-2} \sum_{i,j} u_{x_i} u_{x_i x_j} u_{x_j}.$$

Neste artigo iremos ampliar o conjunto de soluções de (1.1) apresentados em outros artigos, como nos de G. Aronsson [1, 2] e o de Peres [6]. Com esse intuito utilizaremos o método de Monge para equações diferenciais parciais uniformes, reduzindo esta equação diferencial parcial de segunda ordem no sistema de Monge, cuja solução resulta numa EDP de primeira ordem do tipo $f(p, q) = 0$. Então aplicamos o método desenvolvido Espindola [3, 4, 5] para determinar a solução geral desta, e portanto uma solução generalizada contendo uma função arbitrária de (1.1).

2 Solução Generalizada

A equação diferencial parcial p-harmônica (1.1) pode ser reescrita como

$$p^2 r + 2pqs + q^2 t = 0, \tag{2}$$

onde $r = p_x$, $t = p_y$ e $s = p_y = q_x$.

O método de Monge [7], pode ser aplicado para esta equação que sendo quasilinear, uniforme e homogênea resulta no seguinte sistema de Monge:

$$p^2(dy)^2 - 2pqdxdy + q^2(dx)^2 = 0 \tag{3}$$
$$p^2dpdy + q^2dqdx = 0. \tag{4}$$

A partir da equação (2.3) temos

$$(pdy - qdx)^2 = 0,$$

ou

$$dy = \frac{p}{q}\,dx.$$

Que substituída em (2.4) fornece a forma diferencial

$$pdp + qdq = 0,$$

cuja solução é

$$p^2 + q^2 = \lambda^2,$$

onde λ é uma constante arbitrária.

Como a equação diferencial parcial é da forma $F(p,q) = 0$ logo sua solução, obtida pelo método desenvolvido por Espindola [3], é

$$u = x\sqrt{\lambda^2 - q^2} + yq + \varphi(q), \tag{5}$$

com a condição

$$\varphi\prime(q) = \frac{xq}{\sqrt{\lambda^2 - q^2}} - y, \tag{6}$$

onde $\varphi(q)$ é uma função arbitrária.

Portanto, obtemos uma solução generalizada, i.e., uma solução de (1.1) que depende de uma função arbitrária. Então a cada escolha da função arbitrária $\varphi(q)$, a eq. (2.6) fornece $q = q(x,y)$ que substituído em (2.5) determina uma solução completa $u = u(x,y)$, dependente de duas constantes arbitrárias.

3 Exemplo

Considere

$$\varphi(q) = arcsin\left(\frac{q}{\lambda}\right) + \mu, \tag{7}$$

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0007

onde μ é uma constante arbitrária. Da equação (2.6) temos

$$q = \frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2}. \tag{8}$$

A solução de (1.1) é obtida substituindo (3.7) e (3.8) em (2.5)

$$u = x\left[\lambda^2 - \left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2}\right)^2\right]^{1/2} + y\left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2}\right) \tag{9}$$

$$+ \arcsin\left(\frac{x \pm y\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2}\right) - \mu. \tag{10}$$

4 Comentários Finais

Esta aplicação do método de obtenção de soluções gerais para certas EDPs de primeira ordem, desenvolvido por Espindola [3], demonstra a importância destas soluções. Anteriormente o mesmo método foi aplicado na obtenção da solução geral da equação de Hamilton-Jacobi unidimensional [4].

O método citado está sendo generalizado para diversos casos, permitindo a ampliação de suas aplicações.

É interessante ressaltar que esse método fornece sempre uma solução geral para EDPs, lineares ou não, i.e., que depende de uma função arbitrária, sem nenhum vínculo ou condições especiais, podendo portanto ser aplicado a qualquer problema específico, pois não existem restrições sobre as condições que esse irá impor, a não ser aquelas devidas a cálculos algébricos especiais, nos quais os métodos numéricos e computacionais conhecidos podem ser aplicados.

Em muitas situações aparecem EDPs de primeira ordem em fisica matemática, ou em outros ramos da matemática pura e aplicada. Tais equações surgem na construção de superfícies características de EDPs de segunda ordem, no cálculo variacional, em alguns problemas geométricos, assim como, em problemas de dinâmica dos gases cuja solução utiliza o método das características, fornecendo soluções completas. Podemos ainda citar seu aparecimento em: mecânica de meios contínuos, dinâmica de gases, hidrodinâmica, transferência de massa e calor, teoria de ondas, acústica, fluxos multifásicos, engenharia química, metereologia, etc...

Mas, com certeza, uma das importantes generalizações do método seria a dos sistemas dinâmicos que na maioria dos casos, são compostos por sistemas de EDPs de primeira ordem não lineares.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0007

5 Apêndice - Soluçâo Geral para $\mathbf{F(p, q) = 0}$

Um resumo do método desenvolvido em Espindola [3].

Considere a EDP de primeira ordem $F(p, q) = 0$. A forma diferencial Pfaffiana para u é

$$du = p\,dx + q\,dy. \tag{11}$$

Aplicando uma transformação de Legendre obtemos

$$d(xp + yq) - du - xdp - ydq = 0.$$

Desde que $dF = F_p dp + F_q dq = 0$, logo $dp = -(F_q/F_q)dq$ então

$$d(xp + yq) - du + \left(x\frac{F_q}{F_p} - y\right) dq = 0\,. \tag{12}$$

Sendo esta uma forma diferencial Pfaffiana pode ser aplicado o teorema [7]:

Teorema 5.1 *A condição necessária e suficiente para que a equação diferencial Pfaffiana*
$\vec{X} \cdot \vec{dr} = 0$ *seja integrável é que* $\vec{X} \cdot rot\,\vec{X} = 0.$

Que nesse caso resulta em

$$\vec{X} \cdot rot\,\vec{X} = -\left(\frac{\partial}{\partial(xp + yq)} + \frac{\partial}{\partial u}\right)\left(x\frac{F_q}{F_p} - y\right) = 0,$$

que integrada fornece

$$u - xp - yq = \phi(q). \tag{13}$$

Substituindo na equação (4.12) obtém-se

$$\left(x\frac{F_q}{F_p} - y\right) = -\phi'(q). \tag{14}$$

A solução geral da equação diferencial é dada pela equaçâo (4.13) na qual q é determinado a partir de (4.14).

Agradecimentos

Ao Dr. Nelson Lima Teixeira (in memoriam) e ao Dr. Oslim Espindola (in memoriam) pelas profícuas discussões.

Referências

[1] Aronsson, G., On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$, Arkiv för Matematic, 7, pp. 395-425,(1968).

[2] Aronsson, G., On certain singular solutions of the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$, Manuscripta Mathematica, 47, Numbers 1-3, pp. 395-425, (1984).

[3] Espindola, M. L., Método de solução das EDPs : $F(u_x, u_y) = 0$; $F(f(x)u_x, u_y) = 0$; $F(u_x, h(y)u_y) = 0$, em Resumos dos trabalhos do II ENAMA, v. II, pp. 84-86, 2008.

[4] Espindola, M. L., Solução geral da equação de Hamilton-Jacobi unidimensional, em "Anais do XXXIII CNMAC", SBMAC, São Paulo, v. 33, pp. 151-153, (2012), http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-ne/2012/trabalhos/PDF/133.pdf; em "Resumo Completo IV Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações", DM/UFPA, Pará, v.1, pp. 92-93, (2010).

[5] Espindola, M. L., General Solution to Unidimensional Hamilton-Jacobi Equation, arXiv:1302.0591, (2013).

[6] Aronsson, G., Peres, Y.;Schramm, O.; Sheffield, S.; Wilson, D. B., Tug-of-war and the infinity Laplacian, J. Amer. Math. Soc., 22, pp. 167-210, (2009).

[7] Sneddon, I., Elements of Partial Differential Equations, MCGRAW-HILL, Kogakusha, First edition, 1957.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0007