Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

O Método de Levenberg-Marquardt para o ajuste de dados não linear pelo Método dos Quadrados Mínimos

Santos Alberto Enriquez Remigio[1]
Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia-MG
Izabela Luiza Oliveira Lima[2]
Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia-MG
Larissa Vitória Silva Araújo[3]
Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia-MG

O problema de ajuste não linear de dados pelo Método dos Mínimos Quadrados consiste em: dado um conjunto de dados (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, e uma função ϕ que depende de m parâmetros (x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$) de forma não linear; determinar o valor dos parâmetros que minimizam a função $F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \phi(\bar{x}, X_i, Y_i))^2$, onde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)^T$. O fato da expressão $\phi(\bar{x}, X_i, Y_i)$ depender de i permite denotá-la por ϕ_i em vez de ϕ.

Existem diferentes métodos para determinar o mínimo da função F: método de Newton, método de Gauss-Newton e método Levenberg-Marquardt(L-M), entre outros. Seguindo o reportado em [1], a função a ser minimizada será: $F(\bar{x}) = 0.5\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \phi_i(\bar{x}, X_i, Y_i))^2$. Podemos reescrever a função F da seguinte forma: $F(\bar{x}) = 0.5||f||^2$,onde $f = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)^T$, $f_i = Y_i - \phi_i(\bar{x}, X_i, Y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e $||f||$ é a norma euclidiana de f. As experiências numéricas a serem apresentadas são para funções que dependem de dois parâmetros, assim $f_i(x, y) = Y_i - \phi_i(x, y, X_i, Y_i)$.O método Levenberg-Marquardt define um conjunto de aproximações para o ponto de mínimo de F, $\bar{x}^*$. A cada iteração determina-se o tamanho de passo resolvendo-se um sistema linear de equações cuja matriz dos coeficientes é uma matriz simétrica definida positiva, que garante solução do sistema linear. Tal sistema linear é:

$$(J^T J + \mu I)h_{LM} = -g, \tag{1}$$

onde $g = J^T f$, $\mu > 0$ e $J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y} \end{bmatrix}$

O Parâmetro μ é conhecido como parâmetro de Levenberg-Marquardt e existem diferentes propostas para ele. Algumas propostas são: $\mu = \frac{||g_k||^2}{f_k}$ (proposta 1); $\mu = ||g_k||^2$ (proposta 2) e $\mu = \frac{2||g_k||}{3k}$ (proposta 3).

A seguir apresentamos duas experiências numéricas de ajuste de dados não linear pelo MMQ, resolvidas pelo método L-M com derivadas da matriz Jacobiana aproximadas por diferenças finitas centradas de segunda ordem [2], com tamanho do passo h.

---

[1]santos.er@ufu.com
[2]izabelalima144@gmail.com
[3]larissa_vivi@hotmail.com

Os dados dos problemas 1 e 2 são apresentados na Tabela 1. Após análise da dispersão dos dados, as funções de ajuste escolhidas para os problemas 1 e 2 são, respectivamente, $\phi(X) = xe^{(yX)}$ e $\phi(X) = \sqrt{x + yX}$ (funções não lineares nos parâmetros x e y)

Tabela 1: Dados dos problemas.

Problema 1								
X	-1.0	-0.7	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8	1.0
Y	36.547	17.264	8.155	3.852	1.820	0.860	0.406	0.246
Problema 2								
X	0.3131	0.244	0.1384	0	0.5207	1.2763	1.9836	2.8516
Y	0.4802	0.8831	1.3052	1.6941	2.6944	3.6917	4.4262	5.1874

Aplicando o método de Levenberg-Marquardt e independente da proposta de cálculo de μ verifica-se a convergência do método para a mesma solução.

Tabela 2: Número de iteração para cada proposta.

h	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}
Problema 1	Valor inicial $(x_0, y_0) = (0, 0)$				
Proposta 1	35	35	35	35	35
Proposta 2	12	12	12	12	12
Proposta 3	25	25	25	25	25
Problema 2	Valor inicial $(x_0, y_0) = (3, 9)$				
Proposta 1	5	5	5	6	17
Proposta 2	9	9	9	9	8
Proposta 3	11	11	11	10	89

Para o problema 1, como mostra a tabela 2, as propostas 2 e 3 tiveram menos iterações e não houve alteração do número destas para os valores diferentes de h. As propostas 1 e 2 são as melhores para o problema 2 mesmo com a alteração do número de iterações para os diferentes valores de h.

Referências

[1] K. A. Benatti, O método de Levenberg-Marquardt para o problema de quadrados mínimos não linear, Dissertação de Mestrado em Matemática, UFPR, (2017).

[2] M. F. N. Gonçalves, Aplicação do método de Newton e de Chun Z livres de derivadas em problemas de ajuste não linear no método dos Mínimos Quadrados (MMQ). In: XI SEMAT E I SEMEST, 2011, Uberlândia. Anais... .[Uberlândia]:Faculdade de Matemática, 2011. p. 1-4.