Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Aplicação do Método TVD explícito para a solução de um problema de Buckley-Leverett com função de fluxo descontínuo

Santos A Enriquez-Remigio[1]
Faculdade de Matemática, UFU, Uberlândia, MG
Ana Paula Moreira de Freitas [2]
Faculdade de Engenharia Mecânica, UFU, Uberlândia, MG

A equação de Buckley-Leverett é muito comum na área de engenharia de recuperação de petróleo, pois modela problemas com fluxo bifásico em meios porosos. Ela define as quantidades relativas dos fluidos, neste casos: óleo e água, presentes nos reservatórios. Estas quantidades são funções de alguns parâmetros, tais como velocidade do escoamento do fluido injetor e permeabilidade relativa entre os fluidos trabalhados [1]. Basicamente, o fluido injetado (água) ao penetrar no meio poroso age como se fosse um pistão com vazamento, ou seja, ele vai empurrando o fluido a ser deslocado (óleo) para fora dos poros e, em consequência do vazamento, uma certa quantidade de óleo fica retido. Portanto, na região em que houve escoamento do fluido injetado ocorre fluxo simultâneo dos dois fluidos, ou seja, escoamento bifásico.

Desconsiderando os efeitos da gravidade, da capilaridade e considerando o escoamento incompressível, a equação de Buckley-Leverett unidimensional na forma conservativa é dada por:

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

com condição inicial: $u(x,0) = u_L$, se $a \leq x < x_0$ e $u(x,0) = u_R$, se $b \geq x > x_0$. A função fluxo analítico f é dada por $f(u,k(x)) = \frac{u^2}{u^2+k(x)(1-u)^2}$, onde $k(x)$ é a razão de viscosidades.

Por outro lado, os métodos TVDs (Total Variation Diminishing) explícitos clássicos de três pontos partem do método numérico conservativo da forma:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(F^n_{i+\frac{1}{2}} - F^n_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

onde F é denominada de fluxo numérico, com:

$$F^n_{i+\frac{1}{2}} = F^n_{i+\frac{1}{2}}(u_{i-1}, u_i) \quad e \quad F^n_{i-\frac{1}{2}} = F^n_{i-\frac{1}{2}}(u_i, u_{i+1}).$$

[1]santos.er@ufu.br
[2]anapaulamorfre@gmail.co

Estes esquemas aproveitam um fluxo numérico de baixa ordem (F_L) e outro de alta ordem (F_H) para definir um novo fluxo numérico dado por:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_{L,i+\frac{1}{2}} + \varphi(r_{i+\frac{1}{2}}) \left[F_{H,i+\frac{1}{2}} - F_{L,i+\frac{1}{2}} \right].$$

Os esquemas TVDs são construídos para possuir alta precisão nas regiões suaves da solução e serem capazes de resolver com alta acurácia as descontinuidades presentes na solução, além de não apresentar oscilações espúrias [2].

A função $\varphi = \varphi(r)$ é denominada limitador de fluxo e depende do parâmetro $r_{i+\frac{1}{2}}$ que mede a razão de inclinação da função u nas bordas da célula. Diferentes opções para a função φ definem os tipos de limitadores de fluxo. Os limitadores de fluxo usados no presente trabalho foram: MINMOD, OSHER, MUSCL, SUPERBEE [2, 3].

Dois problemas de Buckley-Leverett foram resolvidos, ambos em malhas homogêneas e o método TVD escolhido é o clássico reportado em [2]. O primeiro foi um problema com solução analítica conhecida que permitiu a verificação da convergência numérica do método numérico. Já o segundo, foi o problema reportado em [4], que consiste na equação (1), sujeita à seguinte condição inicial: $u(x, 0) = 0$, se $0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $u(x, 0) = 1$ se $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$; com função k contínua por partes dada por: $k(x) = 50$ se $0 \leq x < 0.5$ e $k(x) = 5$ se $0.5 < x \leq 1$. O CFL usado para o segundo problema foi igual a 0.1 e o tempo final $t_f = 0.2$.

Resultados mostraram que o método TVD clássico reportado em [2] consegue reproduzir a solução para o problema de Buckley-Leverett com função de fluxo descontínua reportado em [4] (obtido por um método *Meshless*).

Referências

[1] P. H. F. Fulco, D. K. E. Carvalho, P. R. M. Lyra, T. B. Fraga. *Solução do problema de Buckley-Leverett via formulações explícita e totalmente implícita do método Upwind de Primeira Ordem.* In Anais do VI Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás (VI PDPETRO), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, 2011.

[2] P.K. Sweby. *High resolution schemes using flux limiters for hiperbolic conservation laws.* SIAM J. Numer. Anal., 21(5):995{1011, 1984. DOI = 10.1137/0721062}.

[3] N. Henderson, N. M. Barbosa. *Solução numérica para os problemas de Burgers e Buckley-Leverett: uma comparação do método composto LWLF-4 com os métodos TVD?s com limitadores de fluxo.* In Anais do VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (VI CONEM), Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2010.

[4] F. Benkhaldoun, A. Halassi, D. Ouazar, M. Seais, A. Taik. *Slope limiters for radial basis functions applied to conservation laws with discontinuous flux function.* Engineering Analysis with Boundary Elements 66 (2016) 49-65.