Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Delta-derivada e Teorema do Valor Médio em Escalas Temporais

Maria Clara Favarão Crespi[1]
Departamento de Matemática e Computação, FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Roberto de Almeida Prado[2]
Departamento de Matemática e Computação, FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

O objetivo do presente trabalho é apresentar duas versões distintas do chamado teorema do valor médio em escalas temporais. Tal resultado faz parte do cálculo em escalas temporais, que é uma teoria que foi desenvolvida inicialmente pelo matemático Stefan Hilger em 1988 [1], com o objetivo de unificar os cálculos discreto e contínuo, e atualmente existem diversos trabalhos envolvendo o assunto (ver [1, 2]).

Uma escala temporal $\mathbb{T}$ é um subconjunto fechado não-vazio arbitrário dos números reais $\mathbb{R}$. Para $t \in \mathbb{T}$, define-se o operador de avanço $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ por $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ e o operador de recuo $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ por $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$. Se $\sigma(t) > t$ diz-se que t é disperso à direita. Introduz-se também o conjunto $\mathbb{T}^\kappa$ como segue: se $\mathbb{T}$ tem um ponto máximo t_1 disperso à esquerda ($\rho(t_1) < t_1$), então $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{t_1\}$; caso contrário, $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$.

Definição 0.1. *Sejam $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função e $t \in \mathbb{T}^\kappa$. A delta-derivada de f no ponto t é definida como sendo o número $f^\Delta(t)$ (caso exista) com a propriedade que para cada $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $V_t = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ de t, com $\delta > 0$, de modo que*

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \epsilon\,|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in V_t. \tag{1}$$

Quando $f^\Delta(t)$ existir, dizemos que f é delta-diferenciável em t.

Se $f^\Delta(t)$ existe, então $f^\Delta(t) = f'(t)$ para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $f^\Delta(t) = f(t+1) - f(t)$ para $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Por exemplo, considerando a função $f(t) = t^2$ para $t \in \mathbb{T} := \{\sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\}$, temos que sua delta-derivada é $f^\Delta(t) = \sqrt{t^2+1} + t$, $\forall t \in \mathbb{T}$.

Definição 0.2. *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é dita pré-diferenciável com região de diferenciação D, se f é contínua em $\mathbb{T}$, $D \subset \mathbb{T}^\kappa$, $\mathbb{T}^\kappa \backslash D$ é contável e não contém pontos de $\mathbb{T}$ dispersos à direita, e f é delta-diferenciável em cada ponto $t \in D$.*

Por exemplo, a função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definida sobre a escala $\mathbb{T} := \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+2]$ por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1], \\ t - 3k - 1 & \text{se} \quad t \in [3k+1, 3k+2], k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

[1] mariaclaracrespi@hotmail.com
[2] robertoprado@fct.unesp.br

é pré-diferenciável com região de diferenciação $D = \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\}$.

Enunciaremos agora as duas versões do teorema do valor médio em escalas temporais. A primeira versão foi estudada em [1] e é dada pelo teorema seguinte.

Teorema 0.1. *Sejam $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ funções pré-diferenciáveis com região de diferenciação D. Se $\left|f^{\Delta}(t)\right| \leq g^{\Delta}(t)$ para todo $t \in D$, então*

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) \quad \forall\ r, s \in \mathbb{T}\ ,\ r \leq s. \tag{2}$$

Temos as seguintes consequências do resultado acima.

Corolário 0.1. *Sejam $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ funções pré-diferenciáveis com região de diferenciação D.*
(i) *Se U é um intervalo compacto com pontos finais $r, s \in \mathbb{T}$, então*

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U^{\kappa} \cap D} \left|f^{\Delta}(t)\right| \right\} |s - r|.$$

(ii) *Se $f^{\Delta}(t) = 0$ para todo $t \in D$, então f é uma função constante.*

Para $a, b \in \mathbb{T}$ com $a \leq b$, define-se o intervalo fechado $[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$. Analogamente define-se o intervalo semi-aberto $[a, b)_{\mathbb{T}}$. Em [2] temos uma segunda versão do teorema do valor médio, dada pelo seguinte resultado:

Teorema 0.2. *Seja $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{T}$ uma função contínua em $[a, b]_{\mathbb{T}}$ e delta-diferenciável sobre $[a, b)_{\mathbb{T}}$. Então existem $\tau, \xi \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ tais que*

$$f^{\Delta}(\tau) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^{\Delta}(\xi). \tag{3}$$

Temos as seguintes consequências direta do teorema acima:

Corolário 0.2. *Seja f uma função contínua em $[a, b]_{\mathbb{T}}$ e delta-diferenciável sobre $[a, b)_{\mathbb{T}}$.*
(i) *Se $f^{\Delta}(t) = 0$ para todo $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$, então f é constante em $[a, b]_{\mathbb{T}}$;*
(ii) *Se $f^{\Delta}(t) > 0$ (respect. $f^{\Delta}(t) < 0$) para todo $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$, então f é crescente (respect. decrescente) em $[a, b]_{\mathbb{T}}$.*

O Teorema 0.2 continua válido se a hipótese "f é delta-diferenciável sobre $[a, b)_{\mathbb{T}}$" for substituída por "f é pré-diferenciável sobre $[a, b)_{\mathbb{T}}$ com região de diferenciação $D \subset [a, b)_{\mathbb{T}}$".

Agradecimentos. Agradecemos a FAPESP pela bolsa de iniciação científica (proc. 2017/08515-0).

Referências

[1] M. Bohner and A. Peterson. *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[2] G. Sh. Guseinov. Integration on time scales, *J. Math. Anal. Appl.*, 285: 107–127, 2003.