Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Teorema de Enumeração de Pólya

Adriana Wagner[1]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS
Geovana Tavares Figueiredo[2]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS
Ludier Mariano Rosa[3]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS
Suellen da Silva[4]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS

1 Introdução

A Combinatória Enumerativa é uma área que estabelece o número de maneiras que certos padrões podem ser formados. Dentro da Combinatória enumerativa encontra-se o Teorema de Enumeração de Pólya, esse foi publicado primeiramente por John Howard Redfield, 1927. De maneira independente, em 1937, George Pólya redescobre tal teorema aplicando-o em muitos problemas de contagem, em particular na enumeração de compostos químicos. Assim, neste trabalho temos como objetivo estudar tal teorema e suas aplicações tendo como base [1]. Os estudos aqui apresentados foram e estão sendo realizados no projeto de pesquisa "Teoria de Números e Combinatória"de autoria da professora Adriana Wagner, pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus de Aquidauana, com a participação dos demais autores citados.

2 Teorema de Enumeração de Pólya

Para chegarmos ao objetivo deste trabalho que é o estudo do Teorema de Enumeração de Pólya e algumas aplicações precisamos de alguns pré-requisitos tais como: grupos de simetria; grupo de permutações e índice de ciclos; grupos cíclicos e diedrais; colorações e ações de grupos; órbitas, relações de equivalência sobre as colorações e estabilizadores; Lema de Cauchy-Frobenius. Esses pré-requisitos são encontrados em [3], [1] e [2]. A partir desses conceitos e resultados envolvidos podemos iniciar o estudo do Teorema de Enumeração de Pólya.

Teorema 2.1. (***Teorema de Enumeração de Pólya***) *Seja $X = F(D, C)$ o conjunto de todas as colorações do conjunto D em C e seja ω uma função peso em C. Seja G o grupo das permutações de D que agem em X de maneira usual. Se o índice de ciclos de G é*

[1] adriana.wagner@ufms.br
[2] tavares_geovana@hotmail.com
[3] ludier_mariano@hotmail.com
[4] suellensilva8@hotmail.com

$Z(G, x_1, x_2, x_3, \cdots)$ *então o inventário padrão* F_G *é dado por*

$$F_G = \sum W(f) = Z\left(G; \sum_{c \in C} \omega(c), \sum_{c \in C} \omega(c)^2, \sum_{c \in C} \omega(c)^3, \cdots\right). \tag{1}$$

3 Aplicações

Aqui apresentaremos dois problemas que são solucionados utilizando o Teorema de Enumeração de Pólya sendo um deles a respeito da contagem do número de colorações de um tabuleiro 2×2 e o outro o número de moléculas diferentes de um certo composto químico.

Problema 3.1. *Obter a função geradora para o número de colorações de um tabuleiro* 2×2 *nas cores preto e branco.*

Solução: Temos que $D = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $C = \{preto, branco\}$, $\omega(preto) = p$ e $\omega(branco) = b$. Assim, $G = \{e,\ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4), (\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3), (\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_2), (\alpha_1\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4), (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4),$ $(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_1)(\alpha_3), (\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2)(\alpha_3)\}$, com índice de ciclos dado por $Z(G, x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 2x_4)$. Portanto, pelo Teorema 2.1, substituindo x_1 por $b + p$, x_2 por $b^2 + p^2$ e x_4 por $b^4 + p^4$ em $Z(G, x_1, x_2, x_4)$ obtendo o padrão

$$\begin{aligned} F_G &= \frac{1}{8}((b+p)^4 + 2(b+p)^2(b^2+p^2) + 3(b^2+p^2)^2 + 2(b^4+p^4)) \\ &= p^4 + p^3b + 2p^2b^2 + pb^3 + b^4. \end{aligned} \tag{2}$$

Problema 3.2. *Considere a molécula orgânica da forma* CX_4, *sendo* C *um átomo de carbono e cada* X *qualquer um dos quatro componentes* CH_3, C_2H_5, H *ou* Cl. *Qual é o número de moléculas que contém um ou mais átomos de hidrogênio?*

Solução: O índice de ciclos é dado por $\frac{1}{12}(x_1^4+8x_2x_3+3x_2^2)$. Consideremos $\omega(CH_3) = w_1$, $\omega(C_2H_5) = w_2$, $\omega(Cl) = w_3$ e $\omega(H) = 0$. Assim, o enumerador de estoque é $w_1 + w_2 + w_3$, isto é, função geradora para um componente CH_3, um de C_2H_5, um de Cl e nenhum de H. Logo, do Teorema 2.1 temos que o inventário padrão, para moléculas que não possuem átomos de hidrogênio, é dada por

$$\frac{1}{12}((w_1+w_2+w_3)^4 + 8(w_1+w_2+w_3)(w_1^3+w_2^3+w_3^3) + 3(w_1^2+w_2^2+w_3^2)^2) \tag{3}$$

Sendo $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ em (3) temos que o número de moléculas sem átomos de hidrogênio é

$$\frac{1}{12}(3^4 + 8 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2) = 15. \tag{4}$$

O número total de moléculas sem restrições é 36. Portanto, o número de moléculas que contém pelo menos um átomo de hidrogênio é $36 - 15 = 21$.

Referências

[1] E. Bovo, O teorema de enumeração de Pólya, generalizações e aplicações, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Unicamp, (2005).

[2] N. G. Brujin. Pólya's theory of counting, *Applied Combinatorical Mathematics*, 144–184, New York, 1964.

[3] V. L. Vieira. *Álgebra Abstrata para Licenciatura.* EDUEPB, Campina Grande, 2013.

