Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Atrator de trajetórias de uma equação hiperbólica

Luiz Augusto F. de Oliveira,
Depto de Matemática, IME, USP,
05508-090, São Paulo, SP
E-mail: luizaug@ime.usp.br,

Ricardo de Sá Teles
Depto de Físico-Química, IQ, UNESP
Campus Araraquara
14800-900, Araraquara, SP
E-mail: rteles@iq.unesp.br.

Resumo: *Neste trabalho estudamos uma equação hiperbólica sem a hipótese de unicidade para o correspondente problema de Cauchy. Verificamos a existência de soluções fracas globais por meio do método das aproximações de Galerkin. E o nosso resultado principal é a construção do atrator de trajetórias para o problema considerado.*

Palavras-chave: *Atrator de trajetórias, solução fraca global, Faedo-Galerkin*

Seja Ω um subconjunto aberto, limitado, conexo do $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ e com fronteira suave Γ. Para cada ponto $x \in \Gamma$, indicaremos por $\nu = \nu(x)$ o vetor normal exterior unitário a Γ no ponto x. Consideremos o seguinte problema hiperbólico com condição de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1}u \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\gamma > 0$, $d > 0$ está fixado, $\alpha \in (0,1)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 satisfazendo as seguintes hipóteses: existem constantes positivas γ_0, γ_1, γ_2, c_1, c_2 e $2 < p < \frac{2n}{n-2}$ tais que

$$|f(u)| \leqslant \gamma_0(|u|^{p-1} + 1), \tag{2}$$

$$F(u) = \int_0^u f(w)dw, \qquad F(u) \geqslant \gamma_1 |u|^p - c_1, \tag{3}$$

$$f(u) \cdot u \geqslant \gamma_2 F(u) - c_2, \tag{4}$$

para qualquer $u \in \mathbb{R}$.

Vamos especificar os espaços em que trabalharemos e definiremos quando uma função $u = u(t,x)$ será solução de (1). Como não há um resultado de unicidade de solução para o problema (1) empregaremos a teoria do atrator de trajetórias em nosso estudo, adaptando resultados obtidos nas referências Chepyzhov, V. V. and Vishik, M. I. [1], [2], onde problemas similares a (1) foram considerados para a condição de Dirichlet. Os detalhes podem ser encontrados em R. S. Teles [3].

Consideremos $\tilde{f}(u) = f(u) - |u|^{\alpha-1}u$. Das hipóteses (2)-(4) podemos afirmar que existem constantes positivas $\tilde{\gamma_0}$, $\tilde{\gamma_1}$, $\tilde{\gamma_2}$, $\tilde{c_1}$, $\tilde{c_2}$ tais que

$$|\tilde{f}(u)| \leqslant (\gamma_0 + 1)(|u|^{p-1} + 1) \doteq \tilde{\gamma_0}(|u|^{p-1} + 1); \tag{5}$$

$$\tilde{F}(u) = \int_0^u \tilde{f}(w)dw, \qquad \tilde{F}(u) \geqslant \tilde{\gamma_1}|u|^p - \tilde{c_1}, \tag{6}$$

onde

$$\tilde{\gamma_1} = \frac{\gamma_1}{2} \quad \text{e} \quad \tilde{c_1} = c_1 + \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{2}{\gamma_1 p}\right)^{\frac{\alpha+1}{p-(\alpha+1)}}\left(\frac{p-(\alpha+1)}{p}\right);$$

$$\tilde{f}(u)\cdot u \geqslant \tilde{\gamma_2}|u|^p - \tilde{c_2}, \tag{7}$$

onde

$$\tilde{\gamma_2} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{2} \quad \text{e} \quad \tilde{c_2} = \left[\gamma_2 c_1 + c_2 + \left(\frac{2(\alpha+1)}{\gamma_1\gamma_2 p}\right)^{\frac{\alpha+1}{p-(\alpha+1)}}\left(\frac{p-(\alpha+1)}{p}\right)\right]$$

Faremos algumas observações antes de introduzir a definição de solução para o nosso problema.

Vamos considerar em $H^1(\Omega)$ a norma

$$\|u\|^2 = \int_\Omega (|u|^2 + d|\nabla u|^2)dx \tag{8}$$

para $u \in H^1(\Omega)$, que é equivalente a norma usual

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

O $H^1(\Omega)$ munido da norma (8) será denotado por $H^1_d(\Omega)$.

O espaço dual de $H^1_d(\Omega)$ será denotado por $H^{-1}_d(\Omega)$ e consideraremos o operador contínuo

$$\begin{array}{rcccl} \Delta & : & H^1_d(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}_d(\Omega) \\ & & u & \longmapsto & \langle \varphi, \Delta u\rangle = -\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \end{array}$$

Observemos que para $c_3 = \tilde{c_1} + 1$ existe uma constante positiva K tal que a função $\Phi(u) = (\tilde{F}(u) + c_3)^{\frac{1}{p}}$ é Lipschitz.

Seja q o expoente conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Observemos que se $u \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$, então $|u|^{\alpha-1}u \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$ e de (5) decorre que $\tilde{f}(u) \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$. Além disso, existe uma constante $\tilde{\tilde{\gamma_0}}$ tal que

$$\|\tilde{f}(u)\|^q_{L^\infty(0,T;L^q(\Omega))} \leqslant \tilde{\tilde{\gamma_0}}(\|u\|^p_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} + 1) \tag{9}$$

para todo $T > 0$, onde $\tilde{\tilde{\gamma_0}} = 2^q \tilde{\gamma_0}^q(|\Omega| + 1)$.

Por outro lado, se $u \in L^\infty(0,T;H^1_d(\Omega))$, então $\Delta u \in L^\infty(0,T;H^{-1}_d(\Omega))$. Como $p > 2$, do Teorema de imersão de Sobolev e por dualidade temos $L^q(\Omega) \subset H^{-r}(\Omega)$, onde $r = \max\{1, n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\}$. Logo, se $u \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1_d(\Omega))$, temos que a equação (1) pode ser considerada no sentido de distribuição do espaço $D'(\mathbb{R}_+;H^{-r}(\Omega))$.

Definição 1. *Uma função $u = u(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \Omega$, é uma solução fraca global de* (1) *se $u \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1_d(\Omega))$, $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e u satisfaz a equação* (1) *no sentido de distribuição do espaço $D'(0,T;H^{-r}(\Omega))$, para todo $T > 0$, onde $r = \max\{1, n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\}$, isto é, para toda $\varphi \in H^1_d(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ vale a seguinte igualdade*

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(t,x)\cdot\varphi(x)dx + 2\gamma\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)\cdot\varphi dx + \int_\Omega \big[d\nabla u(t,x)\cdot\nabla\varphi(x) + f(u(t,x))\cdot\varphi(x) - \\ - |u(t,x)|^{\alpha-1}u(t,x)\cdot\varphi(x)\big]dx = 0.$$

Observação 1. *Sabemos que se u é uma solução fraca global da equação* (1), *então* $u \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_d^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *e* $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *para todo* $T>0$, *portanto* $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$. *Temos também que* $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H^{-r}(\Omega))$ *e* $u_{tt} \in L^\infty(0,T;H^{-r}(\Omega))$ *para todo* $T>0$, *donde concluímos que* $u_t \in C(0,T;H^{-r}(\Omega))$.

Proposição 1. *Se u é uma solução fraca global de* (1), *então*

$$u \in C_w(0,T;H_d^1(\Omega)), \quad u \in C_w(0,T;L^p(\Omega)), \quad u_t \in C_w(0,T;L^2(\Omega), \tag{10}$$

para todo $T>0$. *Além disso, para todo* $\delta \in \mathbb{R}$ *a função*

$$t \mapsto \|u(t)\|_{H_d^1(\Omega)} + \|u_t(t)+\delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \tag{11}$$

é semicontínua inferiormente para $t \in [0,T]$, *para todo* $T>0$.

Sejam $u \in H_d^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$. Definamos $I : (H_d^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big[|v|^2 + d|\nabla u|^2 + 2\tilde{F}(u)\big]dx.$$

Proposição 2. *Existem constantes positivas* k_1, k_2, k_3, k_4 *tais que*

$$k_1\big[\|u\|^2_{H_d^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\big] - k_2 \leqslant I(u,v) \tag{12}$$

e

$$I(u,v) \leqslant k_3\big[\|u\|^2_{H_d^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\big] + k_4. \tag{13}$$

Demonstração. De fato, usando a hipótese (6) e a desigualdade de Young obtemos

$$I(u,v) \geqslant \frac{1}{2}\min\{1,\tilde{\gamma_1}\}\big[\|u\|^2_{H_d^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\big] - \\ - \left[\tilde{c_1}|\Omega| + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tilde{\gamma_1}p}\right)^{\frac{2}{p-2}}|\Omega|\left(\frac{p-2}{p}\right)\right].$$

Se $\tilde{L}$ é uma constante positiva tal que $|\tilde{F}(u)| \leqslant \tilde{L}(1+|u|^p)$, então

$$I(u,v) \leqslant \frac{1}{2}\max\{1,2\tilde{L}\}\big[\|u\|^2_{H_d^1(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\big] + \tilde{L}|\Omega|.$$

Portanto,

$$k_1 = \frac{1}{2}\min\{1,\tilde{\gamma_1}\}, \quad k_2 = \tilde{c_1}|\Omega| + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tilde{\gamma_1}p}\right)^{\frac{2}{p-2}}|\Omega|\left(\frac{p-2}{p}\right)$$

$$k_3 = \frac{1}{2}\max\{1,2\tilde{L}\}, \quad k_4 = \tilde{L}|\Omega|.$$

□

Seja

$$0 < \delta < \min\{2\gamma, 2k_1\}, \tag{14}$$

onde $k_1 = \frac{1}{2}\min\{1,\tilde{\gamma_1}\}$. Consideremos o seguinte funcional

$$J_\delta(u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|v|^2 + d|\nabla u|^2 + 2\tilde{F}(u) + 2\delta u\cdot v + 2\delta\gamma|u|^2\right]dx. \tag{15}$$

Proposição 3. *O funcional J_δ satisfaz*

$$\left(k_1 - \frac{\delta}{2}\right)\left[\|u\|^2_{H^1_d(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right] - k_2 \leqslant J_\delta(u,v) \tag{16}$$

e

$$J_\delta(u,v) \leqslant \left(k_3 + \frac{\delta}{2} + \delta\gamma\right)\left[\|u\|^2_{H^1_d(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right] + k_4, \tag{17}$$

onde as constantes k_1, k_2, k_3, k_4 foram definidas na Proposição 2.

Corolário 1. *Se u é uma solução fraca global de (1), então a função real $z(t) \doteq J_\delta(u(t), u_t(t))$ é semicontínua inferiormente no intervalo $[0,T]$, para todo $T > 0$.*

Teorema 1. *Se $u : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução suficientemente regular de (1) e $z(t) = J_\delta(u(t), \partial_t u(t))$, então existem constantes $\mu_\delta > 0$ e $\rho_\delta > 0$ tais que*

$$\frac{d}{dt} z(t) + \mu_\delta z(t) \leqslant \rho_\delta. \tag{18}$$

e portanto,

$$z(t) \leqslant z(0)e^{-\mu_\delta t} + \frac{\rho_\delta}{\mu_\delta}. \tag{19}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_\delta(u,u_t) &\leqslant -2\gamma\int_\Omega |u_t|^2dx + \delta\int_\Omega |u_t|^2 dx - d\delta\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \tilde{\gamma_2}\delta\int_\Omega |u|^p dx + \delta\tilde{c_2}|\Omega| + \\ &\leqslant -\min\left\{2\gamma-\delta, \delta, \frac{\delta\tilde{\gamma_2}}{2}\right\}\left[\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1_d(\Omega)} + \|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right] + \delta\left[\tilde{c_2}|\Omega| + \left(\frac{4}{\tilde{\gamma_2}p}\right)^{\frac{2}{p-2}}|\Omega|\frac{p-2}{p}\right].\end{aligned} \tag{20}$$

De (20) e (17), obtemos

$$\frac{d}{dt}J_\delta(u,u_t) \leqslant -k_5 J_\delta(u,u_t) + k_6, \tag{21}$$

onde

$$k_5 = \frac{\min\{2\gamma-\delta, \delta, \delta\tilde{\gamma_2}\}}{k_3 + \frac{\delta}{2} + \delta\gamma}, \quad k_6 = k_4k_5 + \delta\left[\tilde{c_2}|\Omega| + \left(\frac{4}{\tilde{\gamma_2}p}\right)^{\frac{2}{p-2}}|\Omega|\frac{p-2}{p}\right]$$

e as constantes k_3 e k_4 foram dadas na Proposição 2.

E de (21) concluímos que

$$z(t) \leqslant z(0)e^{-k_5 t} + \frac{k_6}{k_5},$$

ou seja, $\mu_\delta = k_5$ e $\rho_\delta = k_6$. □

Fixemos $N > 0$ e vamos definir o espaço de trajetórias $\mathcal{K}^+_d(N)$ da equação (1).

Definição 2. *O espaço $\mathcal{K}^+_d(N)$ é o conjunto das soluções fracas globais u da equação (1) que verificam a desigualdade*

$$z(t) \leqslant Ne^{-\mu_\delta t} + \frac{\rho_\delta}{\mu_\delta},$$

para todo $t \geqslant 0$, onde $z(t) = J_\delta(u(t), \partial_t u(t))$ e δ foi dado em (14).

Proposição 4. *Se $u_0 \in H^1_d(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ e $z_0 = J_\delta(u_0, u_1) \leqslant N$, então existe pelo menos uma solução fraca global $u \in \mathcal{K}^+_d(N)$ tal que*

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad \partial_t u|_{t=0} = u_1.$$

Vamos definir os conjuntos $\mathcal{F}^+_{loc,d}$, $\mathcal{F}^+_{b,d}$ e a topologia $\Theta^+_{loc,d}$ associados à equação (1).

Começamos definindo o conjunto $\mathcal{F}_{T,d}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{T,d} =&\{v : v \in L^\infty(0,T; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; H^1_d(\Omega)), \partial_t v \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)),\\ &\partial_t^2 v \in L^\infty(0,T; H^{-r}(\Omega))\}\end{aligned}$$

e o munimos da topologia $\Theta_{T,d}$ que, em termos de sequências, é descrita da seguinte maneira: uma sequência $\{v_m\} \subset \mathcal{F}_{T,d}$ converge para uma função $v \in \mathcal{F}_{T,d}$ em $\Theta_{T,d}$ se $v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty(0,T; H^1_d(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^p(\Omega))$, $\partial_t v_m \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t v$ em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ e $\partial_t^2 v_m \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t^2 v$ em $L^\infty(0,T; H^{-r}(\Omega))$.

A topologia definida acima torna $\mathcal{F}_{T,d}$ um espaço topológico de Hausdorff e Frechet-Uryshon com base topológica enumerável.

O conjunto $\mathcal{F}_{T,d}$ e a topologia $\Theta_{T,d}$ dão origem aos conjuntos $\mathcal{F}^+_{loc,d}$, $\mathcal{F}^+_{b,d}$ e a topologia $\Theta^+_{loc,d}$.

Temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+_{loc,d} =&\{v : v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1_d(\Omega)), \partial_t v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ e}\\ &\partial_t^2 v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega))\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^+_{b,d} =&\{v \in \mathcal{F}^+_{loc,d} : v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1_d(\Omega)) \cap \partial_t v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \text{ e}\\ &\partial_t^2 v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega)) \text{ com } \|v\|_{\mathcal{F}^+_{b,d}} < +\infty\},\end{aligned}$$

onde

$$\|v\|_{\mathcal{F}^+_{b,d}} = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H^1_d(\Omega))} + \|\partial_t v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))} + \|\partial_t^2 v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega))};$$

E a topologia $\Theta^+_{loc,d}$ em $\mathcal{F}^+_{loc,d}$ é definida da seguinte forma: $v_m \to v$ em $\Theta^+_{loc,d}$ quando $\Pi_{[0,T]} v_m \to \Pi_{[0,T]} v$ em $\Theta_{T,d}$ para todo $T > 0$.

O espaço $\mathcal{F}^+_{loc,d}$ munido da topologia $\Theta^+_{loc,d}$ é um espaço topológico Hausdorff, Frechet-Uryshon e possui uma base enumerável.

O espaço $\mathcal{K}^+_d(N)$ munido da topologia $\Theta^+_{loc,d}$ é o espaço de trajetórias da equação (1).

Definamos a aplicação $T(t) : \mathcal{F}^+_{loc,d} \to \mathcal{F}^+_{loc,d}$ por $T(t)u(s) = u(t+s)$ e consideremos a família $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ que constitui um semigrupo. Como a equação (1) é autônoma temos que $\mathcal{K}^+_d(N)$ é invariante pelo semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, logo podemos considerar $T(t) : \mathcal{K}^+_d(N) \to \mathcal{K}^+_d(N)$.

Proposição 5. *Se $\mathcal{K}^+_d(N)$ é o espaço de trajetórias da equação* (1), *então para toda função $u \in \mathcal{K}^+_d(N)$ temos que $T(t)u \in \mathcal{K}^+_d(N)$ para $t \geqslant 0$.*

Proposição 6. *Se $\mathcal{K}^+_d(N)$ é o espaço de trajetórias da equação* (1), *então $\mathcal{K}^+_d(N) \subset \mathcal{F}^+_{b,d}$.*

Proposição 7. *O espaço de trajetórias $\mathcal{K}^+_d(N)$ é fechado na topologia $\Theta^+_{loc,d}$.*

Agora, fixemos um valor $\delta = \delta_0$ verificando (14). Vamos definir o conjunto

$$P = \left\{ u \in \mathcal{F}^+_{b,d} : z(t) = J_{\delta_0}(u, \partial_t u) \leqslant 2\frac{\rho_{\delta_0}}{\mu_{\delta_0}} \right\}.$$

Observemos que o conjunto P é tal que $\|u\|_{\mathcal{F}^+_{b,d}} < +\infty$ para toda função $u \in \mathcal{F}^+_{b,d}$ e é compacto em $\Theta^+_{loc,d}$. Além disso, a desigualdade (19) implica que o conjunto P é um conjunto absorvente do espaço $\mathcal{K}^+_d(N)$.

Proposição 8. *Se* $\tilde{f}$ *satisfaz* (5)-(7), *então para cada* $d > 0$ *a equação* (1) *possui um atrator de trajetórias* $\mathfrak{A}_d(N)$.

Definamos os conjuntos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{loc,d} =& \{v : v \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}; L^p(\Omega)) \cap L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}; H^1_d(\Omega)), \partial_t v \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \text{ e} \\ & \partial_t^2 v \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}; H^{-r}(\Omega))\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{b,d} =& \{v : v \in L^{\infty}(\mathbb{R}; L^p(\Omega)) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}; H^1_d(\Omega)) \cap \partial_t v \in L^{\infty}(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \text{ e} \\ & \partial_t^2 v \in L^{\infty}(\mathbb{R}; H^{-r}(\Omega)) \text{ com } \|v\|_{\mathcal{F}_{b,d}} < +\infty\},\end{aligned}$$

onde

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{b,d}} = \|v\|_{L^{\infty}(\mathbb{R};L^p(\Omega))} + \|v\|_{L^{\infty}(\mathbb{R};H^1_d(\Omega))} + \|\partial_t v\|_{L^{\infty}(\mathbb{R};L^2(\Omega))} + \|\partial_t^2 v\|_{L^{\infty}(\mathbb{R};H^{-r}(\Omega))};$$

E munimos $\mathcal{F}_{loc,d}$ com a topologia $\Theta_{loc,d}$ definida da seguinte forma: $v_m \to v$ em $\Theta_{loc,d}$ quando $\Pi_{[-T,T]} v_m \to \Pi_{[-T,T]} v$ em $\Theta_{[-T,T],d}$ para todo $T > 0$.

Denotamos por $\mathcal{K}_d$ o núcleo da equação (1) consistindo de todas as soluções fracas u da equação

$$\partial_t^2 u + 2\gamma \partial_t u = d\Delta u - f(u) + |u|^{\alpha-1} u, \qquad t \in \mathbb{R},$$

limitadas na norma do espaço $\mathcal{F}_{b,d}$ e satisfazendo a desigualdade

$$z(t) \leqslant J_\delta(u(t), u_t(t)) \leqslant \frac{\rho_\delta}{\mu_\delta}, \tag{22}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. *Seja* $\mathcal{K}_d^+(N)$ *o espaço de trajetórias da equação* (1) *para* $N > 0$ *fixado. Se* $\mathfrak{A}_d(N) \subset P$ *é o atrator de trajetórias do semigrupo translação* $T(t) : \mathcal{K}_d^+(N) \to \mathcal{K}_d^+(N)$, *então o conjunto* $\mathfrak{A}_d(N)$ *é limitado na norma do espaço* $\mathcal{F}_{b,d}^+$ *e é compacto em relação a topologia* $\Theta_{loc,d}^+$. *Além disso,*

$$\mathfrak{A}_d = \Pi_+ \mathcal{K}_d. \tag{23}$$

O conjunto $\mathcal{K}_d$ *é limitado em* $\mathcal{F}_{b,d}$ *e compacto em* $\Theta_{loc,d}$.

Proposição 9. *o atrator de trajetórias* $\mathfrak{A}_d(N)$ *não depende de* $N > 0$, *isto é,* $\mathfrak{A}_d(N) \equiv \mathfrak{A}_d$.

Referências

[1] V. V. Chepyzhov & M. I. Vishik, Attractors for equations of mathematical physics, Colloquium publications, 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] V. V. Chepyzhov & M. I. Vishik, Global attractor and its perturbations for a dissipative hyperbolic equation, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 8, (2001) 311-330.

[3] R. S. Teles, Atratores de trajetórias para algumas classes de equações diferenciais parciais, Tese de Doutorado, IME-USP, 2012.

