Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Sobre Equações Diferenciais Descontínuas

Iguer Luis Domini dos Santos[1]
Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

Resumo. Neste trabalho estudamos as soluções generalizadas de Euler e de Hermes para equações diferenciais descontínuas. Assim, são estudadas propriedades envolvendo as soluções de Euler e de Hermes. Em particular, estudamos as relações entre as soluções de Euler e de Hermes. Além disso, provamos que as soluções de Hermes satisfazem algumas propriedades que são análogas das propriedades satisfeitas pelas soluções de Euler.

Palavras-chave. Inclusões Diferenciais, Equações Diferenciais Descontínuas, Soluções de Euler, Soluções de Hermes

1 Introdução

Equações diferenciais descontínuas foram estudadas, por exemplo, em [2–5]. A solução generalizada de Euler para equações diferenciais descontínuas foi abordada em [2–4]. Já a solução generalizada de Hermes foi abordada em [3–5]. Neste trabalho estudamos propriedades das soluções generalizadas de Euler e de Hermes para o problema de valor inicial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(a) = x_0 \tag{1}$$

onde $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Se f é uma função contínua, então em [2] prova-se que qualquer solução de Euler x para o problema de valor inicial (1) é continuamente diferenciável em (a, b) e satisfaz $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ $\forall t \in (a, b)$. Esta propriedade para soluções de Euler é afirmada na parte (c) do teorema [[2], 1.7. Theorem]. Aqui nós obtemos um resultado análogo para soluções de Hermes. O teorema [[2], 1.7. Theorem] diz respeito a propriedades para soluções de Euler. Aqui nós também obtemos analogias com as partes (a) e (b) desse teorema para soluções de Hermes do problema de valor inicial (1).

2 Preliminares

Nessa seção consideramos conceitos e resultados que serão utilizados no desenvolvimento do presente trabalho.

---

[1]iguerluis@mat.feis.unesp.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

2.1 Medida e integral de Lebesgue

Aqui relembramos conceitos básicos de teoria da medida. Uma abordagem mais completa de medida e integral de Lebesgue, pode ser encontrada em [6].

Definição 2.1. *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diz-se Lebesgue mensurável se para todo conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ a sua pré-imagem*

$$f^{-1}(V) = \{t \in [a, b] : f(t) \in V\}$$

for um conjunto Lebesgue mensurável.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma propriedade P é válida para quase todo ponto (q.t.p.) de I, se essa propriedade é válida em $I\backslash N$, onde N é um conjunto com medida de Lebesgue nula.

O espaço de Banach de funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue integráveis com a norma

$$\|x(\cdot)\|_{L_1} = \int_a^b |x(t)|dt$$

é denotado por $L_1([a, b])$.

2.2 Funções absolutamente contínuas

A definição de função absolutamente contínua pode ser encontrada em [1, 7].

Definição 2.2. *Uma função $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é dita absolutamente contínua se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer coleção enumerável de subintervalos disjuntos $[a_k, b_k]$ de $[a, b]$ satisfazendo*

$$\sum (b_k - a_k) < \delta$$

temos

$$\sum |x(b_k) - x(a_k)| < \varepsilon.$$

Enunciamos abaixo um resultado considerado em [1] para funções absolutamente contínuas.

Teorema 2.1. *Uma função contínua é a integral de sua derivada se e somente se ela é uma função absolutamente contínua.*

Como abordado em [7], uma função absolutamente contínua $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em quase todo ponto de $[a, b]$, e sua derivada $\dot{x}(\cdot)$ é uma função Lebesgue integrável. Além disso, vale a fórmula

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)dt$$

para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$. Assim, qualquer função absolutamente contínua $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ pode ser representada na forma

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \dot{x}(s)ds.$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0324

Vamos nos referir a quaisquer função absolutamente contínua $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ como um arco em $[a, b]$.

Faremos uso do resultado a seguir, conhecido como Lema de Gronwall e abordado em [2].

Proposição 2.1. *Seja x um arco em $[a, b]$ que satisfaz*

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \gamma \|x(t)\| + c(t) \qquad q.t.p. \;\; t \in [a, b]$$

onde γ é uma constante não negativa e onde $c(\cdot) \in L_1([a, b])$ é uma função não negativa. Então, para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)\|x(a)\| + \int_a^t e^{\gamma(t-s)} c(s) ds.$$

Se a função c é constante e $\gamma > 0$, então

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)(\|x(a)\| + c/\gamma).$$

2.3 Teorema fundamental do cálculo

Faremos uso da primeira parte do teorema fundamental do cálculo, como abordado em [8] e enunciado abaixo.

Teorema 2.2. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), e sua derivada é $f(x)$:*

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

3 Soluções Generalizadas de Euler e de Hermes

No que se segue abordamos as soluções de Euler e de Hermes para o problema de valor inicial (1). Inicialmente definimos as soluções de Euler como em [2]. Assim, seja

$$\pi = \{t_0, t_1, ..., t_{N-1}, t_N\}$$

uma partição de $[a, b]$, onde $t_0 = a$ e $t_N = b$. O diâmetro da partição π é dado por

$$\mu_\pi := \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq N\}.$$

Definição 3.1. *Definimos o arco poligonal de Euler, associado ao problema de valor inicial (1) e correspondente à partição π, como o arco $x_\pi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ dado por:*

$$\begin{aligned} x_\pi(t_0) = x_0, \;\; x_\pi(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0), \quad t \in [t_0, t_1] \\ x_\pi(t_1) = x_1, \;\; x_\pi(t) = x_1 + (t - t_1) f(t_1, x_1), \quad t \in [t_1, t_2] \end{aligned}$$

e por indução

$$x_\pi(t_i) = x_i, \quad x_\pi(t) = x_i + (t - t_i) f(t_i, x_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

quando $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0324

Definição 3.2. *Dizemos que o arco* $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *é uma solução de Euler para o problema de valor inicial (1), se* x *é o limite uniforme de arcos poligonais de Euler* x_{π_j}*, correspondentes a alguma sequência* π_j *tal que* $\mu_{\pi_j} \to 0$*.*

A seguir consideramos exemplos de soluções de Euler. Assim, considere a função $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t, x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

e seja $x_0 = 0$. Dada uma partição $\pi_j = \{t_0^{(j)}, t_1^{(j)}, ..., t_{N_j}^{(j)}\}$ de $[0, 1]$, o arco poligonal de Euler x_{π_j} é dado por

$$x_{\pi_j}(t) = t, \quad t \in [t_0^{(j)}, t_1^{(j)}]$$
$$x_{\pi_j}(t) = t_1^{(j)}, \quad t \in [t_i^{(j)}, t_{i+1}^{(j)}]$$

quando $i \in \{1, ..., N_j - 1\}$. Como $|x_{\pi_j}(t)| \leq |t_1^{(j)}|$ para todo $t \in [0, 1]$ e $t_1^{(j)} \to 0$ quando $j \to \infty$, então $x(t) = 0$ é a única solução de Euler para o problema de valor inicial (1). Considere agora a função $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t, x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

e seja $x_0 = 0$. Para toda partição π de $[0, 1]$ temos que $x_\pi = 0$. Assim, $x(t) = 0$ é a única solução de Euler para o problema de valor inicial (1). Suponha agora que $x_0 = 1$. Neste caso, para toda partição π de $[0, 1]$ segue que $x_\pi = 1 + t$. Dessa forma, $x(t) = 1 + t$ é a única solução de Euler para o problema de valor inicial (1).

Para definir soluções de Hermes precisamos primeiro definir soluções de Carathéodory.

Definição 3.3. *Um arco* $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *é uma solução de Carathéodory para o problema de valor inicial (1) se, e somente se,* x *satisfizer a equação diferencial dada na equação (1) para q.t.p.* $t \in [a, b]$ *e* $x(a) = x_0$*.*

Abaixo definimos soluções de Hermes como em [4].

Definição 3.4. *Seja* $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *um arco. Dizemos que* x *é uma solução de Hermes para o problema de valor inicial (1) se, e somente se, existirem funções* $p_j : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *Lebesgue mensuráveis e soluções de Carathéodory* x_j *do problema de valor inicial*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t) + p_j(t)), y(a) = x_0 \tag{2}$$

tal que $p_j \rightrightarrows 0$ *e* $x_j \rightrightarrows x$*.*

A notação $p_j \rightrightarrows 0$ significa convergência uniforme. Observamos também que uma solução de Euler é uma solução de Hermes, como afirmado abaixo.

Proposição 3.1. *Suponha que existam constantes positivas* γ *e* c *tal que*

$$\|f(t, x)\| \leq \gamma\|x\| + c \tag{3}$$

para todo $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$*. Toda solução de Euler do problema de valor inicial (1) é uma solução de Hermes.*

A prova do resultado anterior pode ser encontrada em [3]. A seguir consideramos um exemplo de solução de Hermes. Para isso, considere novamente a função $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t,x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

e seja $x_0 = 0$. Se $p_j(t) = 1/j$ e $x_j(t) = t$, então x_j é uma solução de Carathéodory para o problema de valor inicial (2) para todo $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Portanto $x(t) = t$ é uma solução de Hermes para o problema de valor inicial (1). Como neste caso $x(t) = 0$ é a única solução de Euler para o problema de valor inicial (1), concluímos que em geral uma solução de Hermes não é uma solução de Euler.

No teorema abaixo provamos propriedades para soluções de Hermes que fazem uma analogia com o teorema [[2], 1.7. Theorem].

Teorema 3.1. *Suponha que f seja Lebesgue mensurável em t para cada x fixado. Suponha também que f satisfaça a condição de crescimento linear dada na equação (3). Então:*

(a) Existe pelo menos uma solução de Hermes y para o problema de valor inicial (1). Além disso, qualquer solução de Hermes é de Lipschitz.

(b) Existe uma constante positiva K tal que toda solução de Hermes satisfaz

$$\|y(t) - y(a)\| \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)(\|y(a)\| + K/\gamma)$$

para todo $t \in [a,b]$.

(c) Se f é uma função contínua, então qualquer solução de Hermes y para o problema de valor inicial (1) é continuamente diferenciável em (a,b) e satisfaz $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ $\forall t \in (a,b)$.

Demonstração. A existência de pelo menos uma solução de Hermes y está estabelecida no teorema [[4], Theorem 6]. Se y for uma solução de Hermes para o problema de valor inicial (1), então existem funções $p_j : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensuráveis e soluções de Carathéodory y_j do problema de valor inicial (2) tais que $p_j \rightrightarrows 0$ e $y_j \rightrightarrows y$. Logo existem $N \in \mathbb{N}$ e $c_1 > 0$ satisfazendo $\|p_j(t)\| \leq 1$ e $\|y_j(t)\| \leq c_1$ para todo $t \in [a,b]$, quando $j \geq N$. Assim, se $L = \gamma c_1 + \gamma + c$, então

$$\begin{aligned} \|\dot{y_j}(t)\| &= \|f(t, y_j(t) + p_j(t))\| \leq \gamma\|y_j(t) + p_j(t)\| + c \\ &\leq \gamma\|y_j(t)\| + \gamma\|p_j(t)\| + c \leq \gamma c_1 + \gamma + c \\ &= L \quad q.t.p. \;\; t \in [a,b] \end{aligned}$$

e portanto y_j é de Lipschitz com constante de Lipschitz L. Dessa forma, y é de Lipschitz com constante de Lipschitz L. Isto prova o item (a).

Sejam y e y_j como na prova do item (a). Vimos que

$$\|\dot{y_j}(t)\| \leq \gamma\|y_j(t)\| + \gamma + c \quad q.t.p. \;\; t \in [a,b]$$

para todo $j \geq N$. Se $K = \gamma + c$, temos que

$$\|\dot{y_j}(t)\| \leq \gamma \|y_j(t)\| + K \quad q.t.p. \;\; t \in [a,b]$$

e da proposição 2.1 segue que

$$\|y_j(t) - y_j(a)\| \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)(\|y(a)\| + K/\gamma)$$

para todo $t \in [a,b]$. Portanto

$$\|y(t) - y(a)\| \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)(\|y(a)\| + K/\gamma)$$

para todo $t \in [a,b]$, o que prova o item (b).

Novamente, sejam y e y_j como na prova do item (a). Como uma função contínua em $\mathbb{R}^{n+1}$ é uniformemente contínua em conjuntos compactos, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(t,z) - f(t,w)\| < \varepsilon$$

quando $\|z\| \leq c_1 + 1$, $\|w\| \leq c_1 + 1$ e $\|z - w\| < \delta$. Assim, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f(t, y_j(t) + p_j(t)) - f(t, y_j(t))\| < \varepsilon$$

para todo $j \geq J$. Assim, se $j \geq J$ temos que

$$\begin{aligned}
&\|y_j(t) - y_j(a) - \int_a^t f(\tau, y_j(\tau))d\tau\| \\
&= \|\int_a^t \{\dot{y_j}(\tau) - f(\tau, y_j(\tau))\}d\tau\| \\
&= \|\int_a^t \{f(\tau, y_j(\tau) + p_j(\tau)) - f(\tau, y_j(\tau))\}d\tau\| \\
&\leq \varepsilon(t-a) \leq \varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Tomando $j \to \infty$, concluímos que

$$\|y(t) - y(a) - \int_a^t f(\tau, y(\tau))d\tau\| \leq \varepsilon(b-a).$$

Como ε é arbitrário, obtemos

$$y(t) = y(a) + \int_a^t f(\tau, y(\tau))d\tau$$

e do teorema 2.2 y é continuamente diferenciável em (a,b) e satisfaz $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ para todo $t \in (a,b)$. Dessa forma concluímos a prova do item (c). $\square$

Referências

[1] J. -P. Aubin and A. Cellina. Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. In *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. ISSN: 0072-7830.

[2] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. Nonsmooth analysis and control theory. In *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998. ISSN: 0072-5285.

[3] D. A. R. da Silveira, Equações diferenciais descontínuas e inclusões diferenciais, Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, 2009.

[4] I. L. D. dos Santos. Discontinuous dynamic equations on time scales, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 64:383–402, 2015.

[5] O. Hájek. Discontinuous differential equations, I, *J. Differential Equations*, 32:149–170, 1979.

[6] H. L. Royden. *Real Analysis*. The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London, 1963.

[7] G. V. Smirnov. Introduction to the theory of differential inclusions. In *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. ISSN: 1065-7339.

[8] G. B. Thomas, M. D. Weir, and J. Hass. *Cálculo. Volume 1*. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2012.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0324