Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma nota sobre o problema de corte de estoque com múltiplos objetivos sob incerteza

Luiz Leduino de Salles Neto[1]

Instituto de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal de São Paulo, São Jose dos Campos, SP

Resumo Vivemos num momento onde muitas indústrias tem revolucionado seu modo de produção, incorporando tecnologias em crescente desenvolvimento, como a internet das coisas e *big data*. Nesse trabalho abordamos, de forma inicial, o problema de corte de estoque, importante para empresas de diversos ramos, levando em conta múltiplos objetivos e também a incerteza inerente ao processo, entendendo ser essa abordagem adequada para os desafios da indústria 4.0. Apresentamos alguns conceitos, modelos e resultados teóricos. Tal abordagem é inédita na literatura e evidencia o potencial de desenvolvimento da área em prol da otimização dos processos industriais no contexto da quarta revolução industrial em curso.

Palavras-chave. Problema de Corte, Indústria 4.0, Otimização sob incerteza, Otimização multiobjetivo.

1 Introdução

O Brasil enfrenta um período de desindustrialização, ou seja, uma redução da sua capacidade industrial. Entre os pesquisadores e entidades da área há diferentes avaliações das causas e do que deve ser feito. Contudo, é possível afirmar que sem uma modernização do modo de produção o país dificilmente conseguirá reverter a situação. Esse processo de modernização deve acompanhar o que boa parte do mundo tem chamado de quarta revolução industrial, ou indústria 4.0 (nomenclatura de origem alemã) ou manufatura avançada (nomenclatura de origem americana). Nesse sentido propomos uma atuação em prol do desenvolvimento de novos modelos matemáticos e métodos computacionais no contexto da indústria 4.0 para os problemas de corte.

O problema de corte (clássico) objetiva encontrar a melhor forma de se obter itens demandados a partir do corte de peças maiores, minimizando algum tipo de custo ou maximizando o lucro. Assim, um problema de corte pode ser decompostos em dois subproblemas distintos: gerar os padrões de corte e combiná-los da melhor forma possível, a fim de atingir a demanda exigida.

Liu et al. [7] apresentaram, recentemente e de forma pioneira, o problema de corte de estoque no contexto da Indústria/Internet das Coisas 4.0. Contudo esse trabalho,

[1]luiz.leduino@unifesp.br

único publicado até o momento segundo o nosso conhecimento, apresenta apenas uma heurística, sem considerar todos os aspectos envolvidos no processo descrito pelos próprios autores. Na seção seguinte apresentamos o problema de corte de estoque. e as definições básicas de otimização multiobjetivo são apresentadas. Na seção 3 são apresentados os modelos propostos nesse trabalho, que levam em conta todos os fatores supracitados e alguns resultados teóricos desses modelos, bem como um exemplo para ilustrar o potencial da abordagem proposta. A seção 4, por fim, apresenta as conclusões e as perspectivas de novos trabalhos.

2 Preliminares

O problema de corte e estoque (clássico) consiste em cortar peças maiores W em menores w_i com objetivo de atender uma demanda d_i onde $i = 1...n$.

Cada combinação diferente de itens que serão cortados de uma bobina específica é chamado de padrão de corte e a cada troca de padrão de corte temos um custo para reconfiguração da máquina chamado *setup*.

Quando temos que atender uma grande demanda de itens em um curto espaço de tempo setup passa a ter um grande custo, visto que a máquina fica parada durante esse período de tempo. Assim, devemos encontar um equilíbrio entre número de *setups* e a quantidade de objetos processados, já que são objetivos conflitantes.

Apresentamos a seguir o modelo matemático para o problema de corte de estoque:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimize} & c_1 \sum_{j=1}^{n} x_j + c_2 \sum_{j=1}^{n} y_j & \\ \text{s.a:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i, & i = 1, ..., m. \\ & x_j \leq M y_j & j = 1, ..., n. \\ & x_j \in N, & j = 1, ..., n. \\ & y_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n. \end{array} \tag{1}$$

onde c_1 é o custo de cada bobina e c_2 o custo de setup.

Essa abordagem enfrenta um grande problema para ser útil, de fato, na prática: na maioria dos casos não é possível atribuir um custo monetário para o tempo de preparação da máquina. A importância do setup depende sobretudo da velocidade de produção necessária para atender a demanda dentro do prazo acordado com os clientes. Dessa forma, o tempo de preparaçâo da máquina, chamado na área de setup, é variável e pode ser melhor gerenciada com base na experiência do gerente de produção. Nesse sentido, a abordagem por meio de um problema multiobjetivo é, na nossa visão, mais apropriado para a indústria. A literatura contém alguns trabalhos que usam métodos heurísticos para gerar boas soluções para o problema de corte com múltiplos objetivos [5, 9]. Alguns trabalhos recentes trazem análises teóricas e métodos exatos [1, 3, 8], mas nenhum deles consideram a incerteza na demanda.

Em algumas indústrias, como a de móveis, é importante minimizar o número de ciclos de serra. Seja CC o número máximo de objetos que podem ser cortados ao mesmo tempo.

Considere o seguinte modelo matemático:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & c_1 \sum\limits_{j=1}^{n} x_j + c_2 \sum\limits_{j=1}^{n} z_j & \\
& & \\
\text{s.a:} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i, & i = 1, ..., m. \\
& x_j \leq CC z_j & j = 1, ..., n. \\
& x_j \in N, & j = 1, ..., n. \\
& z_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n.
\end{array}
\tag{2}
$$

Considerando a abordagem multiobjetiva mais adequada para a indústria, nós estudamos nesse trabalho os seguintes Problemas de Corte com Múltiplos Objetivos (PCMo):

$$
(PCMo1) \left\{ \begin{array}{c} x^* = min_x \ f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{s. a: } x \in X \end{array} \right. \tag{3}
$$

onde

- $f_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \equiv$ número de objetos processados.
- $f_2(y) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \equiv$ setup.
- $X = \{x \in Z^n, \ x \geqq 0 : \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i, i = 1, ..., m\}$, $x_j \leq M y_j$ para $j + 1, ...n$, $x_j \in Z$ para $j = 1, \ldots, n$, $y_j \in \{0, 1\}$, Z é o conjunto dos números inteiros$\}$.

$$
(PCMo2) \left\{ \begin{array}{c} x^* = min_x \ f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \\ \text{s. a: } x \in X \end{array} \right. \tag{4}
$$

onde

- $f_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \equiv$ número de objetos processados.
- $f_2(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j \equiv$ setup.
- X como acima definido.

Salles-Neto et al. [8] fazem uma análise teórica sobre esses dois problemas, também sem considerar a incerteza na demanda.

Para definir precisamente o conceito de solução eficiente considere o seguinte problema de otimização multiobjetivo (POM):

$$
\textbf{(POM)} \quad Min \quad \begin{array}{c} f(x), \\ x \in S \end{array}
$$

onde S é um conjunto viável do problema.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0342

Para uma precisa definiação de solução eficiente, ou Pareto-ótima, para um POM, assumimos a seguinte relação de ordem:

Se $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{array}{lcll} x = y & \Leftrightarrow & x_i = y_i, & \forall i = 1, \ldots, n, \\ x < y & \Leftrightarrow & x_i < y_i, & \forall i = 1, \ldots, n, \\ x \leqq y & \Leftrightarrow & x_i \leq y_i, & \forall i = 1, \ldots, n, \\ x \leq y & \Leftrightarrow & x_i \leq y_i, & \forall i = 1, \ldots, n, \quad \text{e existe } j \text{ tal que } x_j < y_j. \end{array}$$

Similarmente para $>, \geqq, \geq$.

Podemos agora definir o que seria uma solução eficiente para um POM.

Definition 2.1. *Um ponto viável $\bar{x}$ é chamado de solução eficiente para um POM se não existe outro ponto viável x, tal que $f(x) \leq f(\bar{x})$.*

Como já comentado, existem poucos trabalhos na literatura que trabalham com o problema de corte multiobjetivo (PCMo). Recentemente, Arana and Salles Neto [1] apresentaram condições de otimalidade para esse problema. Aliano et al. [3] apresentam alguns métodos para obtenção de soluções eficientes para o problema considerando como funções-objetivo o número de objetos e o setup. Na nossa opinião trata-se do estado da arte nesse problema. Contudo, esses trabalhos não tratam da incerteza da demanda, inerente ao processo e que, com o processo de revolução industrial em curso, será cada vez mais importante. Esses trabalhos também não abordam a função-objetivo do número de ciclos de serra.

3 O problema de corte com múltiplos objetivos sob incerteza: novos modelos e propriedades

Como comentado anteriormente, na vida real a demanda (vetor d) não é conhecida com precisão pelas indústrias que trabalham com cortes em sua linha de produção (papel, alumínio...). Existem muitos poucos artigos publicados que tratam o problema de corte com incerteza [2, 4]. Entretanto, nenhum usa otimização multiobjetivo.

Neste trabalho nós estudamos os seguintes modelos matemáticos de PCMo sob incerteza (PCMoI):

$$(PCMoI1) \left\{ \begin{array}{c} w^* = min_x\ f(w) = (f_1(w), f_2(w), f_3(w), f_4(w)) \\ \text{s. a: } w \in W \end{array} \right. \tag{5}$$

onde

- $f_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \equiv$ número de objetos processados.
- $f_2(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j) \equiv$ setup.

- $f_3(x) = \sum_{s=1}^{K}\sum_{i=1}^{m} p_s(co_i o_{is}) \equiv$ o valor esperado do custo de sobreprodução.

- $f_4(x) = \sum_{s=1}^{K}\sum_{i=1}^{m} p_s(cu_i u_{is}) \equiv$ o valor do custo esperado se subprodução.

- $W = \{(x, y, o, u)$ tal que $x \geqq 0 : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - o_{is} + u_{is} = d_{is}, i = 1, ..., m, s = 1, ..., K\}$, $x_j \leq My_j$ para $j + 1, ...n$, $x_j \in Z$ for $j = 1, \ldots, n$, $y_j \in \{0, 1\}$, Z é o conjunto dos números inteiros$\}$.

$$(PCMoI2)\begin{cases} w^* = min_x\ f(w) = (f_1(w), f_2(w), f_3(w), f_4(w)) \\ \text{s. t. } w \in W \end{cases} \tag{6}$$

onde X, $f_1(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ são como acima definido e $f_2(x) = \sum_{j=1}^{n}(z_j)$ é o número de ciclos de serra.

Proposição 3.1. *Se $w^* = (x^*, y^*, o^*, u^*)$ é uma solução eficiente para o PCMoI1 ou para o PCMoI2 então $u^*_{is} \times o^*_{is} = 0$ para todo $i = 1, ..., n$, $s = 1, .., k$.*

Demonstração:

Seja $w^* = (x^*, y^*, o^*, u^*)$ uma solução eficiente para o PCMoI1 ou *PCMoI2*. Suponha que exista um $l \in \{1, ..., n\}$ e um $p \in \{1, ..., K\}$ tal que $u *_{lp}\ o*_{lp} > 0$. Então $u*_{lp} > 0$ e $o*_{lp} > 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $u *_{lp} - o*_{lp} > 0$. Seja $u \in R^{n+K}$ e $v \in R^{n+K}$ tal que $u_{is} = u*_{is}$ e $v_{is} = v*_{is}$ para todo $i \neq p$ e para todo $s \neq p$, $u_{lp} = u*_{lp} - o*_{lp}$ e $o_{lp} = 0$. Seja $w = (x*, y*, u, o)$. Logo, $w \in W$ e $f(w) \leq f(w*)$, o que é uma contradição.

Proposição 3.2. *Seja $D = max_{is}d_{is}$, $i = 1, ..n$ e $j = 1, ..., n$. Se $CC \geq D$ então se $w^* = (x^*, y^*, o^*, u^*)$ é uma solução eficiente para o PCMoI2 então $w*$ é uma solução eficiente para o PCMoI1.*

Demonstração: Seja $D = max_{is}d_{is}$, $i = 1, ..n$ e $j = 1, ..., n$. Seja $w^* = (x^*, y^*, o^*, u^*)$ uma solução eficiente para o *PCMoI2*. Assim, $x_j \leq D$ para todo $j = 1, ..., n$. De fato, se existe um l tal que $x*_l > D$ então $w = (x, y*, o*, u*)$, onde $x_i = x * i$ para todo $i \neq l$ e $x_l = d$ é tal que $f(w) \leq f(w*)$, o que é uma contradição. Por hipótese, $CC \geq D \geq x_j$ para todo j. Então, $z_j = 0$ se $x_j = 0$ e $z_j = 1$ se $x_j > 0$. Isso implica que $\hat{w} = (x*, y*, o*, u*)$, onde $y* = w*$, é uma solução eficiente para o *PCMoI1*.

Exemplo 3.1.

Considere o seguinte exemplo:

- $W = 20$ - tamanho dos rolos em estoque (objetos); $m = 4$ - número de itens; $p = 3$ - número de cenários; $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ as probabilidades de ocorrência de cada cenário; $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (10, 6, 5, 4)$, tamanho dos itens demandados;

- $d_1 = (d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}) = (600, 153, 300, 15)$ vetor demanda no cenário 1; $d_2 = (d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24}) = (400, 200, 300, 30)$ vetor demanda no cenário 2; $d_1 = (d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}) = (600, 200, 400, 30)$ vetor demanda no cenário 3.

Para os testes computacionais todos os padrões de corte viáveis foram gerados. Para obter as soluções eficientes, nós usamos o método ϵ-restrito [6]. Assim, o seguinte problema de otimização foi resolvido para cada $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$:

$$(CSP1_\epsilon) \begin{cases} argmin_x \; f_1(w) \\ \text{s. t. } w \in W \\ f_i(w) \leq \epsilon_i \;\; \forall i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \tag{7}$$

Os seguintes valores para ϵ foram usados: $\epsilon = (4, 100, 100)$, $\epsilon = (3, 100, 100)$, $\epsilon = (2, 100, 100)$, $\epsilon = (4, 100, 0)$, $\epsilon = (3, 100, 0)$, $\epsilon = (2, 100, 0)$, $\epsilon = (4, 0, 100)$,$\epsilon = (3, 0, 100)$,$\epsilon = (2, 0, 100)$, $\epsilon = (4, 1000, 100)$, $\epsilon = (3, 1000, 100)$, $\epsilon = (2, 1000, 100)$, $\epsilon = (4, 50, 50)$,$\epsilon = (3, 50, 50)$, $\epsilon = (2, 50, 50)$.

O problema foi modelado no aplicativo *AMPL*. Para resolver cada problema de otimização foi usado o solver *Gurobi*. Cada problema de otimização foi resolvido em um tempo computacional menor que um segundo em um Laptop Lenovo, 6 MB Ram, intel celeron processor 1.6 GHz, 64 bit, Windows Home 10. Para cada vetor ϵ *solver* encontrou a solução ótima do respectivo problema de otimização.

As soluções eficientes são mostradas na tabela 1.

Tabela 1: Soluções eficientes

f1	f2	f3	f4
422	4	1	100
432	3	0	100
447	4	1	50
450	2	170	100
457	3	1	50
472	4	1	0
481	4	0	0
500	3	70	0

Vale observar que essas soluções permitiriam um gerente de produção decidir, com base em sua experiência, qual o melhor plano de produção para aquele momento.

4 Conclusão e Perspectivas

Nesse trabalho são apresentados dois modelos multiobjetivos que tratam também a incerteza da demanda num problema de corte de estoque. Tal abordagem é importante no contexto da quarta revolução industrial em curso e inédita até onde sabemos. Dois resultados teóricos são apresentados. Um exemplo computacional evidencia o potencial de aplicabilidade das abordagens propostas. Dessa forma, esse trabalho motiva a necessidade de uma série de testes computacionais, para verificar até onde um solver comercial consegue resolver o problema, bem como abre caminho para outros trabalhos validarem e aplicarem a abordagem na prática.

5 Agradecimentos

O autor agradece à Fapesp pelo suporte ao projeto de pesquisa que gerou esse trabalho (Projeto número 2016/01764-2), bem como aos três revisores pelas relevantes sugestões de melhoria no texto.

Referências

[1] M. Arana-Jimenez e L. L. Salles-Neto, Sufficient condition for partial efficiency in a bicriteria nonlinear cutting stock problem. *RAIRO-Operations Research*, 51:709–716, 2017.

[2] D. Alem, P. Munari, M. Arenales e P. Ferreira, On the cutting stock problem under stochastic demand. *Annals of Operations Research*, 179:169–186, 2010.

[3] A. Aliano-Filho, A. C. Moretti e M. Pato, A comparative study of exact methods for the bi-objective integer one-dimensional cutting stock problem. *Journal of the Operational Research Society*, 69:91–107, 2018.

[4] P. Beraldi, M. Bruni e D. Conforti, The stochastic trim-loss problem. *European Journal of Operational Research*, 197:42–49, 2009.

[5] R. R. Golfeto, A. C. Moretti and L. L. Salles Neto, A genetic symbiotic algorithm applied to the cutting stock problem with multiple objectives, *Advanced Modeling and Optimization*, 11: 473–501, 2009.

[6] C. L. Hwang and A. S. M. Masud, Multiple objective decision making—methods and applications: a state-of-the-art survey. Vol. 164. Springer Science and Business Media, 2012. ISSN: 0075-8442.

[7] X. Liu, J. Pei, L. Liu, H. Cheng, M. Zhou, and P. Pardalos, Cutting Stock Problem with the IoT. In *Optimization and Management in Manufacturing Engineering*. Springer, 2017. ISSN: 1931-6828.

[8] L. L. Salles-Neto, S. Araujo, and R. R. Golfeto, Um problema de corte de estoque multiobjetivo. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 6:183–201, 2014.

[9] S. Umetani, M. Yagiura and T. Ibaraki, One Dimensional Cutting Stock Problem with a Given Number of Setups: A Hybrid Approach of Metaheuristics and Linear Programming, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms* 5:43–64, 2006.

