

---

# Um Estudo dos Parâmetros do Algoritmo NSGA-II com o operador SBX em Problemas de Otimização Estrutural Multiobjetivo

Dênis E. C. Vargas<sup>1</sup>

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, IF Sudeste MG, campus Rio Pomba, MG

**Resumo.** O *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) é o algoritmo evolutivo para se resolver problemas de otimização multiobjetivo mais popular na literatura. Também é bastante comum encontrar trabalhos que utilizam o NSGA-II com o operador *Simulated Binary Crossover* (SBX) para evoluir a população de soluções candidatas. Em geral, o desempenho de algoritmos evolutivos é fortemente dependente da configuração de parâmetros de controle, que por sua vez depende de cada problema específico. Neste trabalho foi realizado um estudo no sentido de identificar parâmetros de controle que otimizam o desempenho do NSGA-II com o operador SBX em problemas de otimização estrutural multiobjetivo. Os resultados exibem o conjunto de parâmetros de controle ótimos para cada problema de otimização estrutural multiobjetivo avaliado segundo a métrica Hipervolume.

**Palavras-chave.** NSGA-II, SBX, Configuração de Parâmetros, Otimização Estrutural Multiobjetivo

## 1 Introdução

Os autores de [8] afirmam que dentre todos os algoritmos evolucionistas para problemas de otimização multiobjetivo existentes na literatura, o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), proposto em [5], é o mais popular. É muito comum na literatura encontrar trabalhos que utilizam o NSGA-II com o operador *Simulated Binary Crossover* (SBX) [4]. Esse operador trabalha com codificação real para o vetor de variáveis de decisão ao invés dos tradicionais cromossomos binários.

Em geral, o desempenho de algoritmos evolutivos é fortemente dependente da configuração de parâmetros de controle, que por sua vez depende de cada problema específico. Existem diversos trabalhos na literatura que identificam os melhores parâmetros para os quais a metaheurística adotada neles tem o melhor desempenho nos problemas abordados, tais como [1, 9, 10]. O NSGA-II acoplado ao SBX possui 3 parâmetros de controle:  $\eta_c$ , um número real não negativo definido pelo usuário denominado índice de distribuição;  $\eta_m$ , um número real não negativo definido pelo usuário denominado índice de mutação;  $PC$  que é a probabilidade de cruzamento. Deseja-se neste trabalho identificar quais os valores

---

<sup>1</sup>denis.vargas@ifsudestemg.edu.br

de  $\eta_c$ ,  $\eta_m$  e  $PC$  para os quais o NSGA-II com o operador SBX tem o melhor desempenho nesses problemas.

## 2 *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II)*

O NSGA-II possui um esquema de seleção da nova população baseado em dois principais operadores: a Ordenação de Pareto e uma métrica de promoção de diversidade da população que é livre de parâmetros, chamada *crowding distance* ( $CD$ ).

A Ordenação de Pareto (no inglês *Non-dominated Sorting*), proposta em [6], consiste em classificar uma população  $P$  em  $d$  subconjuntos tais que  $F_1 = \{\text{indivíduos não-dominados de } P \text{ e que não são dominados por nenhum outro de } P\}$  (posto 1 ou, no inglês, *rank 1*),  $F_2 = \{\text{indivíduos não-dominados de } P \setminus F_1 \text{ e que não são dominados por nenhum outro de } P \setminus F_1\}$  (posto 2 ou, no inglês, *rank 2*),  $F_3 = \{\text{indivíduos não-dominados de } P \setminus \{F_1 \cup F_2\} \text{ e que não são dominados por nenhum outro de } P \setminus \{F_1 \cup F_2\}\}$  (posto 3 ou, no inglês, *rank 3*),  $\dots$ ,  $F_d = \{\text{indivíduos não-dominados de } P \setminus \{F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{d-1}\} \text{ e que não são dominados por nenhum outro de } P \setminus \{F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{d-1}\}\}$  (posto  $d$  ou, no inglês, *rank d*), onde  $P = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_d$ .

O valor da métrica *crowding distance* ( $CD$ ) de cada solução se baseia na distância em que sua imagem se encontra das imagens vizinhas mais próximas para cada função objetivo dentro de um mesmo posto. Quanto maior o valor de  $CD$ , mais distante a solução se encontra de suas vizinhas no espaço dos objetivos, tornando maior sua preferência na seleção para a próxima geração da população. Para manter as soluções candidatas que tem imagem nas extremidades de um posto, é atribuído valor infinito aos seus  $CDs$ . Em um problema com duas funções objetivo,  $CD$  é o semiperímetro de um retângulo cujos vértices são as imagens vizinhas mais próximas.

O procedimento de seleção da nova geração da população do NSGA-II é feito como segue: une-se a população corrente com os filhos gerados (no caso deste trabalho, através do operador SBX) e classifica-se esse conjunto pelo procedimento de Ordenação de Pareto. Terá preferência de entrada na próxima geração da população os indivíduos com postos mais baixos. Quando for necessário selecionar um indivíduo entre 2 ou mais dentro do mesmo posto, o indivíduo com maior valor de  $CD$  terá preferência.

## 3 *Simulated Binary Crossover (SBX)*

Neste trabalho, o NSGA-II trabalha com o esquema de seleção apresentado anteriormente gerando a população de filhos a partir da população de pais através do operador SBX. Esse operador cria cada entrada  $i$  dos filhos 1 e 2 (designados por **Filho**<sub>1</sub> e **Filho**<sub>2</sub>) a partir da entrada  $i$  de dois indivíduos selecionados como pais (designados por **Pai**<sub>1</sub> e **Pai**<sub>2</sub>) através do seguinte procedimento: um número aleatório  $\mu \in [0, 1]$  é gerado. Seja a

função de distribuição de probabilidade

$$f(\beta_i) = \begin{cases} 0,5(\eta_c + 1)\beta_i^{\eta_c}, & \text{se } \beta_i < 1 \\ \frac{0,5(\eta_c+1)}{\beta_i^{\eta_c+2}}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\eta_c$  é um número real não negativo definido pelo usuário (denominado índice de distribuição). O valor de  $\beta_i$  é determinado de modo que a área sob a curva de zero até  $\beta_i$  seja  $\mu$ , dado por

$$\beta_i = \begin{cases} (2\mu)^{1/(\eta_c+1)}, & \text{se } \mu \leq 0,5 \\ \left(\frac{1}{2(1-\mu)}\right)^{1/(\eta_c+1)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

As entradas  $i$  dos filhos são respectivamente  $\mathbf{Filho}_1(i) = 0,5[(1 + \beta_i)\mathbf{Pai}_1(i) + (1 - \beta_i)\mathbf{Pai}_2(i)]$  e  $\mathbf{Filho}_2(i) = 0,5[(1 - \beta_i)\mathbf{Pai}_1(i) + (1 + \beta_i)\mathbf{Pai}_2(i)]$ .

Se ocorrer mutação da  $j$ -ésima entrada  $x_j$  do indivíduo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ela será obtida da seguinte forma: um novo número aleatório  $\mu \in [0, 1]$  é gerado e a entrada  $x_j$  do indivíduo é mutada para  $x_j + \delta_j$ , onde

$$\delta_j = \begin{cases} (2\mu)^{1/(\eta_m+1)} - 1, & \text{se } \mu < 0,5 \\ 1 - 2(1 - \mu)^{1/(\eta_m+1)}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3)$$

sendo  $\eta_m$  um número real não negativo definido pelo usuário (denominado índice de mutação).

## 4 Problemas de Otimização Estrutural Multiobjetivo

Problemas de Otimização Estrutural visam o aumento do desempenho da estrutura e a diminuição de seus custos garantindo os requisitos de segurança aplicáveis. Os problemas de otimização estrutural multiobjetivo adotados aqui foram do tipo treliças e sua formulação matemática é dada como segue.

Seja uma treliça de  $N$  barras com  $M$  graus de liberdade de translação de seus nós, com material de massa específica  $\rho$  e comprimento da  $j$ -ésima barra denotada por  $L_j$ . Considere  $s_{jl}$  a tensão normal da  $j$ -ésima barra no caso de carregamento  $l$ ,  $s_{adm}$  a tensão normal máxima que esta barra pode estar submetida e  $u_{il}$  o deslocamento do nó  $i$  no caso de carregamento  $l$ , sendo  $N_L$  o número de casos de carregamento.

O problema de otimização estrutural multiobjetivo consiste em encontrar o vetor de variáveis de projeto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  que está associado com o vetor de áreas das seções transversais das barras da treliça  $(A_1, \dots, A_N)$  que minimiza o problema. No caso discreto, o vetor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  está associado com o vetor de áreas da seção transversal das barras da treliça  $(A_1, \dots, A_N)$  da seguinte forma: a área da seção transversal da  $j$ -ésima barra da treliça é  $A_{[x_j]}$  ( $[x_j]$ -ésimo elemento do conjunto ordenado das possíveis áreas  $AP = \{A_1, \dots, A_P\}$ , com  $[x_j]$  igual ao inteiro mais próximo de  $x_j$ ,  $\mathbf{x} \in [1, P]^N$ ,  $j = 1, \dots, N$  onde  $P$  é o número de elementos do conjunto  $AP$ . No caso contínuo, essa associação é feita diretamente:  $A_j = x_j$ , com  $\mathbf{x} \in [a, b]^N$  sendo  $0 < a < b$  os limites mínimo e máximo do vetor de áreas da seção transversal das barras da treliça  $(A_1, \dots, A_N)$ , respectivamente.

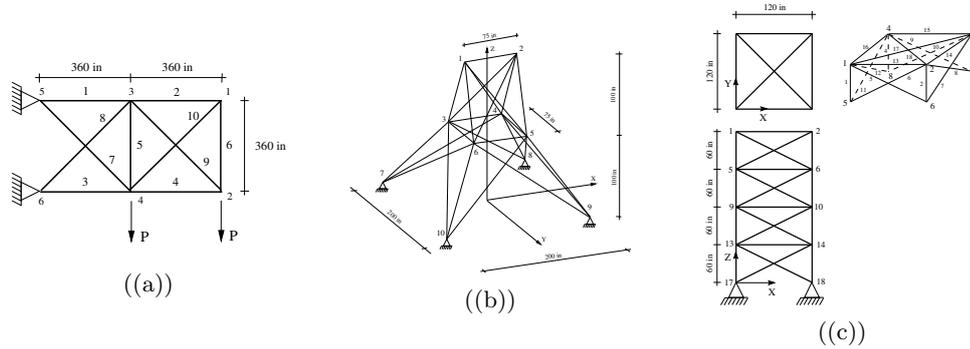


Figura 1: Treliças de 10 barras (a), 25 barras (b) e 72 barras (c).

O problema de OE multiobjetivo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}} \quad & f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \rho A_{[x_j]} L_j \quad \text{e} \quad f_2(\mathbf{x}) = \max(|u_{il}|) \\
 \text{s.a.} \quad & |s_{jl}| \leq s_{adm} \\
 \mathbf{x} \in [1, P]^N \quad & (\text{Caso Discreto}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} \in [a, b]^N, \quad 0 < a < b \quad (\text{Caso Contínuo}). \\
 & j = 1, \dots, N \quad i = 1, \dots, M \quad l = 1, \dots, N_L
 \end{aligned} \tag{4}$$

As treliças utilizadas nos experimentos computacionais desse trabalho foram as de 10, 25 e 72 barras e todas elas representam problemas clássicos da literatura em que se pretende minimizar simultaneamente o peso da treliça e o máximo deslocamento dos seus nós. Foram abordados aqui os casos contínuo e discreto de cada um desses problemas. A Figura 1 ilustra essas treliças e a formulação completa de cada uma delas pode ser encontrada em [11].

## 5 Experimentos Computacionais

Para determinar os parâmetros  $\eta_c$ ,  $\eta_m$  e  $PC$  para os quais o NSGA-II com o operador SBX tem o melhor desempenho nesses problemas, uma experimentação foi realizada e a métrica adotada para a avaliação dos resultados foi o Hipervolume. Proposta em [12], o Hipervolume é uma métrica bastante popular na literatura e avalia tanto a convergência quanto a diversidade do conjunto de soluções não-dominadas obtidas. Para duas funções objetivo, o Hipervolume é a área do polígono cujos vértices são as soluções ótimas obtidas e um ponto de referência, geralmente dado pelos maiores valores conhecidos de cada função objetivo. Um algoritmo que obtém maior Hipervolume é mais susceptível a apresentar melhores resultados em outras métricas [2].

Combinações de alguns valores dos parâmetros  $\eta_c$ ,  $\eta_m$  e  $PC$  mais utilizados na literatura foram analisadas. Os autores de [7] testaram o desempenho do NSGA-II com o operador SBX em diversos problemas *benchmark*. Os valores utilizados em seus experimentos eram combinações de  $\eta_c \in \{5; 10; 15; 20\}$ ,  $\eta_m \in \{5; 20; 500\}$  e  $PC \in \{0, 9; 1\}$ . No intuito de incrementar as opções desses parâmetros, foram adicionados à esses grupos o parâmetro  $\eta_m = 100$  e  $\eta_c = 2$ . Isso porque [5] utiliza  $\eta_m = 100$  em seus experimentos e

$\eta_c = 2$  é comumente usado quando o operador SBX trabalha em problemas de otimização monobjetivo [3]. Assim, a variação de parâmetros feita neste experimento contou com combinações de  $\eta_c \in \{2; 5; 10; 15; 20\}$ ,  $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$  e  $PC \in \{0, 9; 1\}$ . Para cada trinca de valores de  $\eta_c$ ,  $\eta_m$  e  $PC$ , foram realizadas 10 execuções independentes. A Figura 2 mostra a média do Hipervolume das 10 execuções independentes normalizados.

## 6 Conclusão

Esse trabalho teve como objetivo identificar o conjunto de parâmetros ótimos do algoritmo NSGA-II acoplado ao operador SBX para cada problema de otimização estrutural multiobjetivo adotado, a saber, as treliças de 10, 25 e 72 barras, todas clássicas da literatura, nos casos contínuo e discreto. Isso porque, em geral, o desempenho de algoritmos evolutivos é fortemente dependente desses parâmetros em cada problema específico. Os resultados exibidos na Figura 2 mostram os parâmetros identificados avaliados segundo a métrica Hipervolume.

O algoritmo NSGA-II acoplado ao operador SBX possui 3 parâmetros a serem definidos pelo usuário:  $\eta_c$ ,  $\eta_m$  e  $PC$ . Pode-se observar que os valores de  $PC = 1$  e  $\eta_c = 2$  foram unânimes nos problemas. Já os valores eficientes de  $\eta_m$  nesse grupo de problemas variaram entre 20, 100 e 500. Além disso, pode-se observar também que a variação do desempenho do algoritmo NSGA-II acoplado ao operador SBX nesses problemas não foi muito grande em função da variação dos parâmetros de controle, indicando que os resultados tendem a não ser muito dependentes da escolha desses parâmetros.

## Referências

- [1] H. Akbaripour and E. Masehian. Efficient and Robust Parameter Tuning for Heuristic Algorithms, *International Journal of Industrial Engineering Production Research*, 24(2):143-150, 2013.
- [2] L. Bradstreet, The Hypervolume Indicator for Multi-objective Optimisation: Calculation and Use. Tese de Doutorado, The University of Western, 2011.
- [3] K. Deb. Introduction to Evolutionary Multiobjective Optimization, *Lecture Notes in Computer Science*, 5252:59-96, 2008.
- [4] K. Deb and S. Agrawal. Simulated binary crossover for continuous search space, *Complex System*, 2(9):115-148, 1995.
- [5] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2(6):182-197, 1999.
- [6] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co. Inc., 1989.

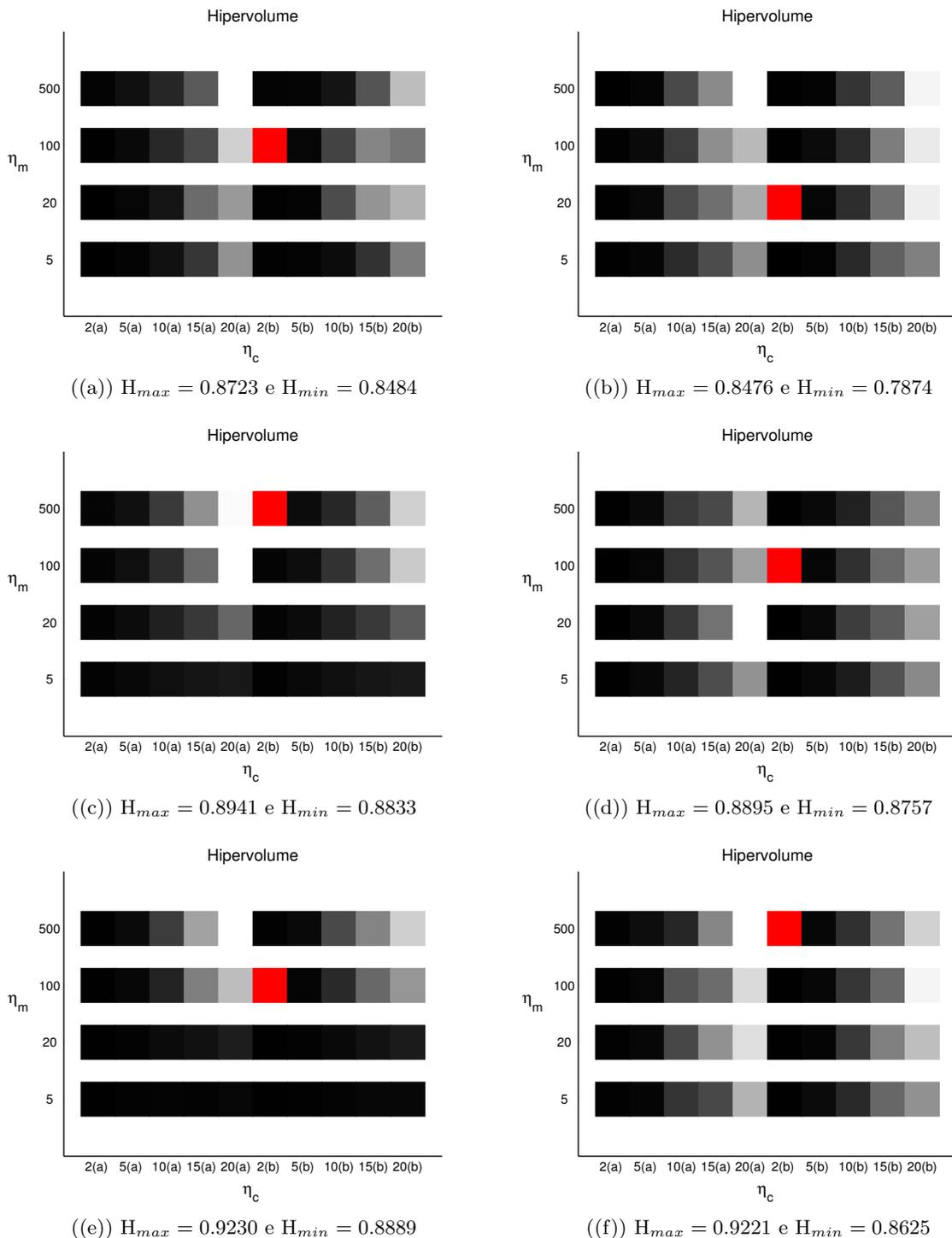


Figura 2: Média do Hipervolume das 10 execuções independentes normalizados obtidos pelo NSGA-II para cada combinação dos valores de  $\eta_c \in \{2; 5; 10; 15; 20\}$ ,  $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$  e  $PC \in \{0, 9; 1\}$  dos problemas das Treliças de 10 ( (a) contínuo e (b) discreto ), 25 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras e 72 ( (e) contínuo e (f) discreto ) Barras. No eixo horizontal de cada figura, (a) significa  $PC = 0, 9$  e (b) significa  $PC = 1$ . Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

- [7] S. Kukkonen, Generalized Differential Evolution for Global Multi-Objective Optimization with Constraints. Tese de Doutorado, Lappeenranta University of Technology, 2012.
- [8] H. Li and Q. Zhang. Multiobjective Optimization Problems With Complicated Pareto Sets, MOEA/D and NSGA-II, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 13(2):284-302, 2009.
- [9] C. Neumuller, S. Wagner, G. Kronberger and M. Affenzeller. Parameter Metaoptimization of Metaheuristic Optimization Algorithms. In *Proceedings of the 13th International Conference on Computer Aided Systems Theory (EUROCAST 2011)*, 367-374, 2011.
- [10] S. K. Smit and A. E. Eiben. Comparing parameter tuning methods for evolutionary algorithms. In *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, 399-406, 2009.
- [11] D. E. C. Vargas, Um Algoritmo de Evolução Diferencial com Penalização Adaptativa para Otimização Estrutural Multiobjetivo. Tese de Doutorado, UFJF, 2015.
- [12] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4):257-271, 1999.