Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

O Paradoxal Efeito Hydra em Populações: Aumento do Número de Indivíduos enquanto Aumenta a Taxa de Mortalidade.

Grace H. Conceição

Depto de Biologia e Zootecnia, Feis, UNESP
15385-000, Ilha Solteira- SP
Email: hingridberg@yahoo.com.br

Berenice C. Damasceno **Luciano Barbanti**

Depto de Matemática, Feis, UNESP
15385-000, Ilha Solteira- SP
Email: berenice@mat.feis.unesp.br Email:barbanti@mat.feis.unesp.br

RESUMO

O fenômeno descrito como "efeito hydra" (onde hydra se refere ao ser mitológico que tendo a cabeça decepada outras aparecem em maior quantidade) permeia o estudo do crescimento populacional em ecologia.

É um consenso geral, que o aumento da taxa de mortalidade em uma população faz diminuir o seu tamanho ao longo do tempo. Como mostrado em [6] e [3], isto é verdade em todo o modelo do tipo não estruturado continuo de crescimento, densidade-dependente, em um meio constante.

Na década de 1950 e mais intensamente na década de 1970 alguns modelos particulares em que este consenso é contradito aparecem em [5] , e recentemente uma visão mais abarcante e envolvendo o efeito hydra no crescimento populacional foi considerada em [1] , [2], [4].

Neste trabalho apresentamos um modelo de equação dinâmica discreta de crescimento populacional dada em [2] dependente de parâmetros reais e funções.

Damos condições sobre estes parâmetros e estas funções para que o efeito hydra apareça.

Seja: $k_0 \in \mathbb{R}$ .A equação à diferença que representa a variação populacional neste trabalho é dada como em [2], recursivamente por:

$$x_{n+1} = g(k_0)x_n f(g(k_0)x_n) \ , \tag{1}$$

para k_0 fixado onde x_n é o tamanho da população no tempo t_n , $n \in \mathbb{N}$, com

$t_0 > t_1 > \cdots t_{m-!} > t_m > \cdots$, e f , $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções apropriadas no

sentido que veremos à seguir no resultado principal deste trabalho.

Teorema : Sejam $g : \mathbb{R}^+ \to (0,1)$ uma função decrescente , $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ diferenciável com $f' < 0$. Então , se para cada k_0 fixo, vale $f(x) > \frac{1}{g(k_0)}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, então temos em (1) o efeito hydra.

Prova: De (1) temos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = g(k_0)f(g(k_0)x_n) . \qquad (2)$$

Como $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e $g(k_0) < 1$, vale

$$f(g(k_0)x_n) > f(x_n) . \qquad (3)$$

Mas, por hipótese

$$f(x_n) > \frac{1}{g(k_0)} . \qquad (4)$$

Deste modo, por (3) e (4),vale

$$f(g(k_0)x_n) > \frac{1}{g(k_0)} .$$

Observando (2) concluímos:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1,$$

e assim

$$x_{n+1} > x_n ,$$

acarretando o efeito hydra como explicitado acima, visto que

$$g(k_0) < 1$$

e f é decrescente.■

Para exemplificar o resultado do Teor.1 vamos considerar na equação (1):

$$g(k) = \frac{1}{k+1,5} \quad , \quad k_0 = 1 \ , \ f(x) = \frac{3x+1}{x} \quad , \quad x_0 = 3.000 \ ,$$

Então a tabela do número de elementos da população no tempo é

TEMPO t_n n=	NÚMERO DE INDIVÍDUOS x_n
0	3.000
1	3.601
2	4322
3	5.188
4	6.226
5	7.472

Conclusão: O efeito hydra é considerado no âmbito de trabalhos em Ecologia como um paradoxo [2]. Vimos que há ao menos uma explicação "teórica" matemática para o fenômeno. Na área de Biologia/Ecologia podemos aproveitar este conhecimento encontrando uma população que se desenvolve segundo a lei em (1) com funções f e g que satisfaçam as condições do teorema 1.È o que estaremos investigando a seguir.

Referências

[1] P.A. Abrams, C. Quince. The impact of mortality on predator population size and stability in systems with stage structured prey. Theor. Pop. Biol., 68, 253-266, (2005).

[2] P. A. Abrams, When does greater mortality increase population size? The long history and diverse mechanisms underlying the hydra effect. Ecology Letters, 12:464-474, (2009).

[3] A. Hastyings. Population biology: Concepts and models, Springer, NY,(1997).

[4] E. Liz. Bubbles, chaos, and the hydra effect in delayed populational models. Colloquium on Diff. Eq. and Integration Theory, Krystni CZ, Masarykova Un. Press, p. 46, 2010.

[5] J. Maynard Smith. Models in Ecology, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1974.

[6] H. Seno. A paradox in discrete single species population dynamics with harvesting/thinning. Math.Biosci., 214, 63-69 (2008).

