

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Raízes de equações quadrinomiais

Jéssica Ventura da Silva¹

Programa de Pós-Graduação em Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Vanessa Botta²

Departamento de Matemática e Computação, FCT, UNESP, Presidente Prudente, SP

Resumo. O principal objetivo deste trabalho é determinar o comportamento das raízes de alguns tipos de equações quadrinomiais que aparecem em alguns problemas da Matemática Financeira. Além disso, apresentamos uma região anelar do plano complexo onde essas raízes estão localizadas.

Palavras-chave. Raízes, Equações Quadrinomiais, Matemática Financeira.

1 Introdução

Consideremos a equação quadrinomial de grau m , representada por

$$P(z) = z^m + a_k z^k + a_p z^p + a_0, \quad (1)$$

com naturais $p < k < m$ e a_k, a_p e a_0 números reais.

Para alguns valores de m, p, k, a_k, a_p e a_0 , a equação (1) é usada em alguns problemas da Matemática Financeira relacionados a determinação da taxa de juros de uma série uniforme de pagamentos diferida. Por exemplo, considerando o número de períodos n , o valor das prestações PMT , o valor futuro FV , o valor presente PV , o período de carência c e a taxa de juros I temos as seguintes equações

$$PMT = \left[\frac{PV(1+I)^{c-1} \times I}{1 - (1+I)^{-n}} \right] \quad (2)$$

e

$$PMT = FV \left[\frac{(1+I)^{c-1} \times I}{(1+I)^n - 1} \right]. \quad (3)$$

Fazendo a mudança de variável $z = 1 + I$ a equação (2) pode ser reescrita como

$$P_1(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta = 0$$

com $\beta = \frac{PMT}{PV}$, $0 < \beta < 1$.

Para a equação (3) tem-se

¹ventura.jessica24@hotmail.com

²botta@fct.unesp.br

$$P_2(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1 = 0$$

com $\alpha = \frac{FV}{PMT}$, $\alpha > 1$.

Assim, o problema da determinação da taxa de juros de uma série uniforme de pagamentos diferida recai na investigação dos zeros positivos dos quadrinômios P_1 e P_2 .

Observe que, uma solução para $n > 4$ é obtida apenas por aproximação, e que para obter uma boa aproximação a maioria dos métodos numéricos necessitam de informações sobre o comportamento de tais raízes, o que justifica a importância do presente trabalho.

Além disso, uma vez que os zeros positivos dos quadrinômios (2) e (3) estão relacionados a taxa de juros procurada, o estudo do comportamento dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$ torna-se algo valioso na literatura.

2 Resultados Preliminares

Os seguintes resultados clássicos serão utilizados nas demonstrações dos principais resultados deste trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados em [1], [2] e [3].

Teorema 2.1 (Regra de Sinais de Descartes). *Sejam Z^+ o número de zeros positivos do polinômio $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ e S^- o número de mudanças de sinal da sequência dos coeficientes. Então, $S^- - Z^+$ é um número par não negativo.*

Teorema 2.2 (Cauchy). *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ um polinômio com coeficientes complexos e $a_0 \neq 0$, e seja r a única raiz positiva da equação*

$$t^n - |a_{n-1}|t^{n-1} - \dots - |a_1|t - |a_0| = 0.$$

Então, todos os zeros da equação $P(z) = 0$ encontram-se no disco $|z| \leq r$.

Teorema 2.3 (Teorema de Rouché). *Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ funções analíticas no interior de uma curva de Jordan C simples e fechada. Se P e Q são contínuas em C e $|P(z)| < |Q(z)|$, $z \in C$, então $F(z) = P(z) + Q(z)$ e $Q(z)$ têm o mesmo número de zeros no interior de C .*

3 Principais Resultados

Nesta seção, mostraremos a quantidade de zeros reais e não reais dos quadrinômios $P_1(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$ e $P_2(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, onde $0 < \beta < 1$, $\alpha > 1$, $P_1(1) = 0$ e $P_2(1) = 0$ e, determinaremos regiões do plano complexo onde seus zeros estão localizados.

Lema 3.1. *Sobre os zeros de $P_1(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$, $0 < \beta < 1$ e $P_1(1) = 0$ tem-se:*

1. *Se $n+c$ é par com n e c pares, $P_1(z)$ tem dois zeros positivos, 0 ou 2 zeros negativos e $n+c-2$ zeros não reais ou $n+c-4$ zeros não reais.*

2. Se $n + c$ é par com n e c ímpares, $P_1(z)$ tem dois zeros positivos e $n + c - 2$ zeros não reais.
3. Se $n + c$ ímpar, $P_1(z)$ tem dois zeros positivos, um zero negativo e $n + c - 3$ zeros não reais.

Demonstração. Pela a regra de sinais de Descartes, $P_1(z)$ tem dois zeros positivos ou não tem zeros positivos. Como $P_1(1) = 0$, concluímos que $P_1(z)$ tem dois zeros positivos, $z = 1$ e $z = \xi$.

Aplicando a regra de sinais de Descartes no quadrinômio $P_1(-z)$:

1. Para $n + c$ par (com n e c pares), $P_1(-z) = z^{n+c} + z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$, logo $P_1(z)$ tem 0 ou 2 zeros negativos;
2. Para $n + c$ par (com n e c ímpares), $P_1(-z) = z^{n+c} + z^{n+c-1} + \beta z^n + \beta$, ou seja, $P_1(z)$ não tem zeros negativos.
3. Para $n + c$ ímpar (com n ímpar e c par ou n par e c ímpar), $P_1(-z) = -z^{n+c} - z^{n+c-1} + \beta z^n + \beta$ ou $P_1(-z) = -z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$, o que implica que $P_1(z)$ tem um zero negativo.

□

Lema 3.2. *Sobre os zeros de $P_2(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, $\alpha > 1$, $P_2(1) = 0$, tem-se:*

1. Se n é par e c é par ou ímpar, $P_2(z)$ tem um ou três zeros positivos, um zero negativo e $n - 2$ ou $n - 4$ zeros não reais.
2. Se n e c são ímpares, $P_2(z)$ tem um ou três zeros positivos, zero ou dois zeros negativos e $n - 1$, ou $n - 3$ ou $n - 5$ zeros não reais.
3. Se n é ímpar e c é par, $P_2(z)$ tem um ou três zeros positivos e $n - 1$ ou $n - 3$ zeros não reais.

Demonstração. Pela Regra de sinais de Descartes, $P_2(z) = 0$ tem um ou três zeros positivos. E aplicando a regra de sinais em $P_2(-z)$ segue que:

1. Se n é par e c é par ou ímpar, então $P_2(-z) = z^n - \alpha z^c - \alpha z^{c-1} - 1$ ou $P_2(-z) = z^n + \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, o que significa que $P_2(z)$ tem um zero negativo.
2. Se n e c são ímpares, então $P_2(-z) = -z^n + \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, ou seja, $P_2(z)$ tem zero ou dois zeros negativos.
3. Se n é ímpar e c é par, então $P_2(-z) = -z^n - \alpha z^c - \alpha z^{c-1} - 1$, o que implica que neste caso $P_2(z)$ não tem zeros negativos.

□

Lema 3.3. Os quadrinômios $P_1(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$ e $P_2(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, $\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > 1$, podem ser representados por

$$P_j(z) = (z - 1)Q_j(z) \quad j = 1, 2$$

onde

$$Q_1(z) = z^{n+c-1} - \beta z^{n-1} - \dots - \beta z - \beta$$

e

$$Q_2(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^c + (1 - \alpha)z^{c-1} + z^{c-2} + \dots + z + 1.$$

Demonstração. Segue diretamente dos Lemas 3.1 e 3.2 e de simples manipulações. \square

Observação 3.1. 1. Se $\beta < \frac{1}{n}$ tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 0} Q_1(z) = -\beta < 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow 1} Q_1(z) = 1 - \beta n > 0,$$

logo $\xi \in (0, 1)$. Além disso, se $\beta > \frac{1}{n}$ então

$$\lim_{z \rightarrow 1} Q_1(z) = 1 - \beta n < 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow 2} Q_1(z) = 2^{n+c-1} - \beta(2^n - 1) > 0,$$

segue que $\xi \in (1, 2)$.

Se $n + c$ é ímpar tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 0} P_1(z) = \beta > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow -1} P_1(z) < 0,$$

logo se $n + c$ é ímpar, o zero negativo de $P_1(z)$ está no intervalo $(-1, 0)$.

2. Quando $c = 1$, o polinômio $Q_1(z) = z^{n+c-1} - \beta z^{n-1} - \dots - \beta z - \beta$ é obtido pela relação de recorrência de três termos:

$$Q_k(z) = (z + 1)Q_{k-1} - zQ_{k-2}(z) \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, n + c - 1,$$

com $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z - \beta$.

3. Se $\alpha > 2c$ tem-se

$$\lim_{z \rightarrow 0} Q_2(z) = 1 > 0 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow 1} Q_2(z) = 2c - \alpha < 0,$$

logo $\xi \in (0, 1)$.

O próximo resultado determina um anel no plano complexo que contém todos os zeros do quadrinômio $P_1(z)$.

Teorema 3.1. Seja $P_1(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$, $0 < \beta < 1$. Todos os zeros de $P_1(z)$ estão em

$$\gamma \leq |z| \leq \delta,$$

onde γ é a única raiz positiva da equação $f(z) = z^{n+c} + z^{n+c-1} + \beta z^n - \beta = 0$, e δ é a única raiz positiva da equação $g(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n - \beta = 0$.

Demonstração. A desigualdade $|z| \leq \delta$ segue diretamente do Teorema 2.2, onde δ é a única raiz positiva da equação $g(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n - \beta = 0$.

Agora, mostremos que $|z| \geq \gamma$. Note que pela regra de sinais de Descartes, $f(z) = z^{n+c} + z^{n+c-1} + \beta z^n - \beta = 0$ tem uma única raiz positiva γ .

Como $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty$, se $f(z) \geq 0$, para algum $z > 0$, então $z \geq \gamma$.

Se $P_1(z) = 0$ para algum z , então

$$\begin{aligned} z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta = 0 &\iff z^{n+c} = (-1)[\beta - z^{n+c-1} - \beta z^n] \\ &\iff |z|^{n+c} = |\beta - z^{n+c-1} - \beta z^n| \geq |\beta - z^{n+c-1}| - |\beta||z|^n \\ &\geq |\beta| - |z|^{n+c-1} - |\beta||z|^n = \beta - |z|^{n+c-1} - \beta|z|^n, \end{aligned}$$

e, portanto $|z|^{n+c} + |z|^{n+c-1} + \beta|z|^n - \beta \geq 0$, isto é, $f(|z|) \geq 0$ e pelas considerações acima segue que $|z| \geq \gamma$. □

Teorema 3.2. *Seja $P_2(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$, $\alpha > 1$, então:*

1. *Todos os zeros de $P_2(z)$ encontram-se em $|z| \leq \mu$, onde μ é a única raiz positiva da equação $f(z) = z^n - \alpha z^c - \alpha z^{c-1} - 1$.*
2. *Se $n < \alpha$, então $P_2(z)$ tem c zeros em $|z| \leq 1$.*

Demonstração. 1. Pela regra de sinais de Descartes, $f(z) = z^n - \alpha z^c - \alpha z^{c-1} - 1$ tem uma única raiz positiva μ .

Aplicando o Teorema 2.2 segue que todos os zeros de $P_2(z)$ estão em $|z| \leq \mu$.

2. Segue diretamente do Teorema 2.3. □

4 Exemplos numéricos

Para alguns valores de n , c , PMT , PV e FV , nas Tabelas 1, 2 e 3 podemos ver os coeficientes e os zeros dos quadrimônios $P_1(z)$ e $P_2(z)$ respectivamente, e a taxa de juros I .

As Figuras 1 e 2 mostram os zeros dos quadrimônios $P_j(z)$ ($j = 1, 2$), representados em vermelho. Note que os zeros satisfazem as condições dos resultados apresentados na seção anterior.

Como $z = 1 + I$ segue que a taxa de juros é dada por $I = z - 1$ com z sendo o zero positivo de $P_j(z)$ ($j = 1, 2$).

n	c	PMT	PV	$P_j(z)$ ($j = 1, 2$)	Zeros de $P_j(z)$	$I(\%)$
6	2	750	2800	$P_1(z) = z^8 - z^7 - 0.27z^6 + 0.27$	$z_1 = -0.72 - 0.309i,$ $z_2 = -0.72 + 0.309i,$ $z_3 = -0.253 - 0.735i,$ $z_4 = -0.253 + 0.735i$ $z_5 = 0.416 - 0.688i,$ $z_6 = 0.416 + 0.688i,$ $z_7 = 1$ e $z_8 = 1.1155$	11,55
7	2	750	2500	$P_2(z) = z^9 - z^8 - 0.3z^7 + 0.3$	$z_1 = -0.820858,$ $z_2 = -0.613 - 0.537i,$ $z_3 = -0.613 + 0.537i,$ $z_4 = -0.086 - 0.808i,$ $z_5 = -0.086 + 0.808i,$ $z_6 = 0.523 - 0.662i,$ $z_7 = 0.523 + 0.662i,$ $z_8 = 1$ e $z_9 = 1.17153$	17,15

Tabela 1: Exemplo referente ao quadrinômio $P_1(z) = z^{n+c} - z^{n+c-1} - \beta z^n + \beta$.

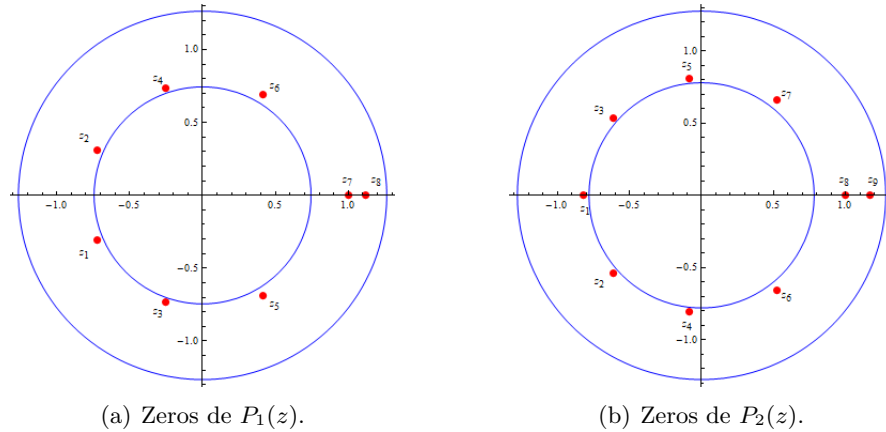


Figura 1: Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$.

n	c	FV	PMT	$P_1(z)$	Zeros de $P_1(z)$	$I(\%)$
6	2	390	3000	$P_1(z) = z^6 - 7.69z^2 + 7.69z - 1$	$z_1 = -1.86522$ $z_2 = -0.222 - 1.723i$ $z_3 = -0.222 + 1.723i$ $z_4 = 0.153587$ $z_5 = 1$ e $z_6 = 1.15634$	15,63

Tabela 2: Exemplo referente ao quadrinômio $P_2(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$.

n	c	FV	PMT	$P_2(z)$	Zeros de $P_2(z)$	$I(\%)$
5	1	2000	320	$P_2(z) = z^5 - 6.25z^2 + 6.25z - 1$	$z_1 = -1.203 - 1.642i$ $z_2 = -1.203 + 1.642i$ $z_3 = 0.199915$ $z_4 = 1$ e $z_5 = 1.20689$	20,69

Tabela 3: Exemplo referente ao quadrinômio $P_2(z) = z^n - \alpha z^c + \alpha z^{c-1} - 1$.

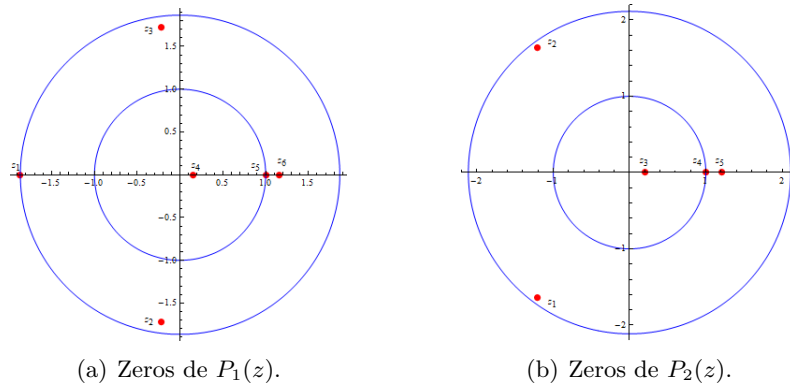


Figura 2: Localização dos zeros de $P_1(z)$ e $P_2(z)$.

5 Conclusões

Neste trabalho, apresentamos algumas propriedades das raízes de uma classe especial de equações quadrinômiais, as quais são muito importante em alguns problemas da Matemática Financeira.

Agradecimentos

À FAPESP e à CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] M. Marden. *Geometry of Polynomials*. 2. ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 1966. v.3.
- [2] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. Singapore: World Scientific, 1994.
- [3] G. Pólya, G. Szegő. *Problems and Theorems in Analysis I: Series, Integral Calculus, Theory of Functions*. Berlin: Springer-Verlag, 1978. v.1.
- [4] C. P. Samanez. *Matemática Financeira*. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.