

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Confinamento no sistema Terra-Lua

Priscilla Sousa-Silva¹

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP
Câmpus de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista, SP

Resumo. Investiga-se numericamente a existência de regiões de estabilidade efetiva no sistema Terra-Lua modelado pelo Problema Restrito de Três Corpos. Nessas regiões, trajetórias permanecem confinadas por longos tempos característicos, possibilitando diversas aplicações práticas no contexto de missões espaciais modernas. Em particular, devido às suas características dinâmicas, as trajetórias nas regiões de estabilidade detectadas em torno do ponto de equilíbrio triangular L_5 podem fornecer boas localizações para operações de longo termo visando a exploração de asteroides.

Palavras-chave. Estabilidade Efetiva, Confinamento, Problema Restrito de Três Corpos

1 Introdução

A investigação e a obtenção de estruturas invariantes em um modelo matemático é fundamental para compreender e controlar a evolução das suas soluções. No Problema Restrito de Três Corpos (PRTC), por exemplo, as variedades invariantes são a espinha dorsal que permite diversas aplicações em Astrodinâmica e Astronáutica, tais como o projeto de trajetórias para missões espaciais modernas como as missões Genesis, Hiten, Artemis, entre outras, além de proporcionar um modelo dinâmico preliminar para o movimento dos asteroides Troianos no sistema Sol-Jupiter [7, 9, 12, 15].

Em particular, o RTBP tem se mostrado uma alternativa promissora para o estabelecimento de perfis de missão de baixa energia a asteroides visando a exploração científica e dos recursos minerais desses corpos celestes [1, 3, 5, 17].

A missão Dawn da NASA, agência espacial americana, e a missão Hayabusa da JAXA, agência espacial japonesa, demonstram o crescente interesse em missões a asteroides nos últimos anos, incluindo missões de coleta e retorno de amostras, desenvolvimento de tecnologias de mitigação e deflexão, e a possibilidade de capturar e transportar asteroides até regiões de mais fácil acesso nas proximidades da Terra [2, 8, 11].

No caso de captura de asteroides, as estruturas invariantes relacionadas ao comportamento de captura-escape e à determinação de domínios de estabilidade efetiva no PRTC podem fornecer soluções adequadas para a fase preliminar de projeto de missão.

Os domínios de estabilidade efetiva são regiões no espaço de fase onde as trajetórias permanecem confinadas por longos períodos de tempo devido à presença de variedades invariantes hiperbólicas de codimensão-1 que atuam como barreiras efetivas entre trajetórias de captura e escape [13, 14].

¹priscilla.silva@unesp.br

Neste trabalho, investigam-se as regiões de estabilidade efetiva em torno dos pontos de equilíbrio Lagrangeanos L_4 e L_5 do sistema Terra-Lua visando sua aplicabilidade ao problema da captura e confinamento de asteroides no espaço cislunar.

2 Modelo Matemático

O PRTC descreve o movimento de um corpo de massa desprezível sob ação da atração gravitacional de dois corpos massivos P_1 e P_2 de massas m_1 e m_2 , chamados de primários, que descrevem órbitas circulares em torno do centro de massa do sistema P_1 - P_2 . Em um referencial com origem no centro de massa que gira com a mesma velocidade angular normalizada $\omega = 1$ dos primários e unidades de distancia normalizadas pela distância entre os primários, as equações de movimento do corpo de massa desprezível são dadas pela Equação (1):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y, \\ \ddot{z} &= \Omega_z,\end{aligned}\tag{1}$$

onde Ω é o potencial efetivo dado pela Equação (2):

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2},\tag{2}$$

e $r_1^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2$ e $r_2^2 = (x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2$ são, respectivamente, os quadrados das distâncias do terceiro corpo à P_1 e P_2 localizados em $(\mu, 0, 0)$ e $(\mu - 1, 0, 0)$, com o parâmetro de massa dado por $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$. No caso do sistema Terra-Lua, $\mu_{EM} = 1.2153614091891635 \times 10^{-2}$.

O sistema de equações dado pela Equação (1) tem uma integral primeira chamada de integral de Jacobi, dada pela Equação (3):

$$J(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2\Omega(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = C,\tag{3}$$

com C chamada de constante de Jacobi. Devido à existência desta integral primeira, o movimento no espaço de seis dimensões é efetivamente restrito à cinco dimensões.

As equações do PRTC têm cinco pontos de equilíbrio, também chamados de pontos de libração. Três deles, L_1 , L_2 , and L_3 , localizam-se ao longo do eixo x -axis de acordo com a seguinte convenção: L_1 entre os primários, L_2 à esquerda de P_2 , e L_3 à direita de P_1 . Os outros dois pontos de equilíbrio localizam-se no plano $z = 0$ nos vértices de triângulos equiláteros formados com os primários com coordenadas $(\mu - 1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$ para L_4 e $(\mu - 1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ para L_5 . Os valores da constante Jacobi nas soluções de equilíbrio são denotados por C_k , $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Para um dado μ , os valores de energia associados a C_k definem as cinco configurações possíveis de regiões de Hill, que correspondem a diferentes possibilidades de transporte no espaço de fase.

De acordo com a análise da estabilidade linear, os pontos de equilíbrio colineares são do tipo centro-centro-sela, portanto, têm variedades centrais normalmente hiperbólicas de quatro dimensões. Para cada nível de energia com $C \lesssim C_k$, C_k , $k = 1, 2, 3$, cada variedade

central contém órbitas periódicas, chamadas de órbitas de Lyapunov verticais e planares, que têm comportamento normal com uma componente elíptica, de forma que existem toros hiperbólicos bidimensionais em seu entorno. Já os pontos de equilíbrio triangulares são linearmente estáveis para $\mu \in (0, \mu_1)$, onde $\mu_1 = (9 - \sqrt{69})/18$ é o valor crítico de Routh, exceto em $\mu_2 = (45 - \sqrt{1833})/90$, $\mu_3 = (15 - \sqrt{213})/30$ e em um conjunto de condições iniciais de medida de Lebesgue pequena para cada μ [10].

Efeitos difusivos lentos são esperados uma vez que os toros invariantes tridimensionais não têm dimensionalidade suficiente para confinar soluções em cinco dimensões [16]. No entanto, existem regiões de estabilidade efetiva em torno de L_4 e L_5 , de forma que as existem trajetórias que permanecem confinadas nesses domínios durante longos intervalos de tempo [4].

3 Resultados

Uma investigação numérica permite a detecção de regiões de estabilidade prática nas quais as trajetórias permanecem confinadas durante longos intervalos de tempo. Essas regiões podem ter tamanhos significativos dependendo do valor do parâmetro de massa [13]. Além disso, diferentes famílias de objetos invariantes são responsáveis pela definição de suas fronteiras [14].

Para a investigação numérica do presente trabalho no caso específico de μ_{EM} , consideram-se condições iniciais em torno de L_5 com velocidade sinódica inicial nula dadas pela Equação (4):

$$\begin{aligned} x &= \mu + (1 + \rho) \cos(2\pi\alpha), \\ y &= (1 + \rho) \sin(2\pi\alpha), \\ z &= z_0, \\ \dot{x} &= \dot{y} = \dot{z} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

onde $2\pi\alpha$ e ρ correspondem, respectivamente, à variável angular e à espessura em torno do ponto de equilíbrio, com $\alpha \in (0, 0.5)$, $z_0 \geq 0$ e os valores de $\rho \in \mathbb{R}$ dados pela espessura de um parabolóide em torno de L_5 (veja [14] para maiores detalhes). Em termos das variáveis (ρ, α, z_0) , o ponto L_5 está localizado em $(0, 1/3, 0)$.

É suficiente explorar a dinâmica em torno de um dos pontos (no caso, L_5) uma vez que o PRTC apresenta simetria de reversibilidade temporal dada pela Equação (5):

$$S : (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \leftrightarrow (x, -y, z, -\dot{x}, \dot{y}, -\dot{z}, -t). \tag{5}$$

Assim, os resultados para o outro ponto (no caso, L_4) são obtidos por simetria.

Para valores de $z_0 \geq 0$ fixos, considerando uma grade de condições iniciais dadas pela Equação (4) com $\Delta\alpha = 0.5 \times 10^{-3}$ e $\Delta\rho = 10^{-4}$, integram-se as trajetórias até 10^4 revoluções dos primários ou até que a trajetória satisfaça o seguinte critério de escape: $|x(t)| > 2$, ou $y(t) > 2$, ou $y(t) < -0.6$, onde t denota o tempo de integração em unidades adimensionais. Essas condições de escape relativamente frouxas foram adotadas para permitir que órbitas que excursionam por extensas regiões em torno de L_5 mas retornam recorrentemente para as proximidades do equilíbrio sejam incluídas na regiões de

estabilidade efetiva. Vale a pena ressaltar que, dependendo da aplicação prática requerida, como por exemplo, obter trajetórias que satisfaçam um perfil de missão específico, estas condições podem ser reformuladas. Neste experimento numérico, a integração das equações foi realizada através de um método de Taylor de ordem alta e passo variável [6].

Utilizando o parâmetro de massa μ_{EM} correspondente ao sistema Terra-Lua, obtém-se um extenso domínio de estabilidade prática em torno de L_5 com trajetórias que permanecem confinadas em movimento quasi-periódico em torno do equilíbrio por mais de 10^4 revoluções dos primários, isto é, por 10^4 meses siderais ou mais de 833 anos, conforme ilustrado na Figura (1).

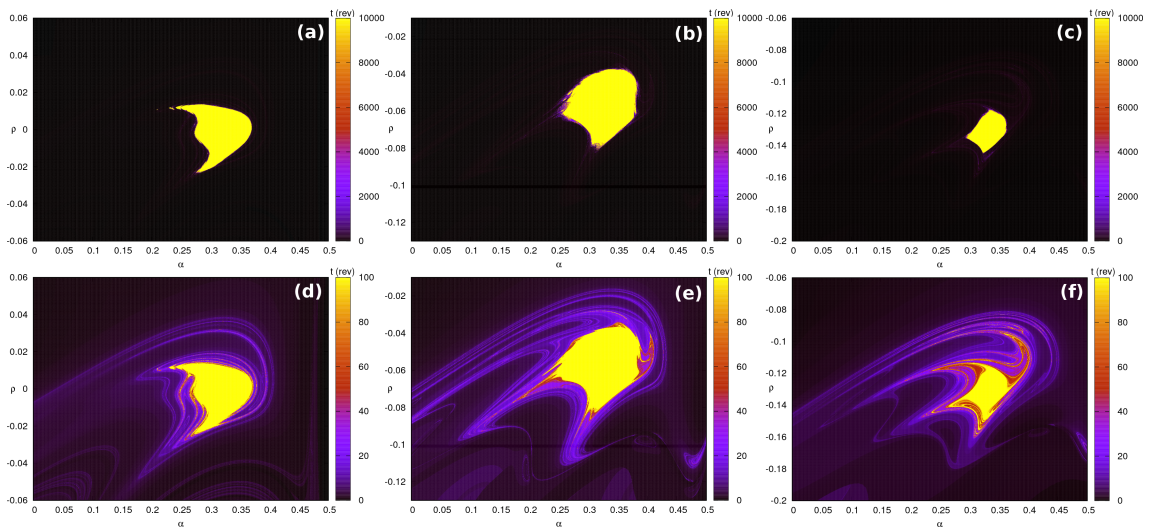


Figura 1: Regiões de estabilidade efetiva no sistema Terra-Lua.

Os casos (a), (b) e (c) ilustram o comportamento dinâmico das trajetórias geradas pelas condições iniciais para três valores distintos de z_0 , respectivamente, 0.0, 0.5, e 0.75. A barra lateral indica o tempo de permanência em meses siderais, até o máximo de 1000 revoluções dos primários. Isto é, as cores marcam o instante de tempo no qual o escape é detectado para cada condição inicial, saturando em amarelo as condições iniciais para as quais as trajetórias permanecem confinadas por mais de 10^4 meses siderais.

Os valores de energia nos quais as soluções confinadas existem correspondem à valores de constante de Jacobi $C < 3.01$, decrescendo a medida que z_0 aumenta.

Uma vez que a exploração *in-situ* de asteroides não requer tempos demasiadamente longos, também são determinadas trajetórias que permanecem confinadas por até 100 revoluções dos primários, que correspondem a aproximadamente 8.3 anos. Os resultados são mostrados nos casos (d), (e) e (f) da Figura (1), onde as condições iniciais para as quais as trajetórias permanecem confinadas por mais de 100 meses siderais estão saturadas em amarelo. Nestes casos, percebe-se um aumento da área potencialmente aplicável para escolha de trajetórias de estacionamento para operações temporárias.

A Figura (2) mostra uma trajetória com condições iniciais $z_0 = 0.0$, $\alpha = 0.3375$ e $\rho = 0.3 \times 10^{-3}$ e com $C = 3.00001919$ que permanece confinada em torno do ponto L_5 por

mais de 10^4 revoluções dos primários. O gráfico da esquerda mostra a trajetória no plano $x-y$ para o tempo de integração correspondente às primeiras 5000 iterações do mapa de Poincaré definido na seção $x = \mu_{Em} - 1/2$, $\dot{x} > 0$. As iteradas do mapa são mostradas na figura como pontos pretos. Já o gráfico da direita mostra a mesma trajetória no plano $y-\dot{y}$. O ponto de equilíbrio é mostrado em azul. Essa trajetória recobre aproximadamente um toro invariante bidimensional durante o tempo em que permanece confinada.

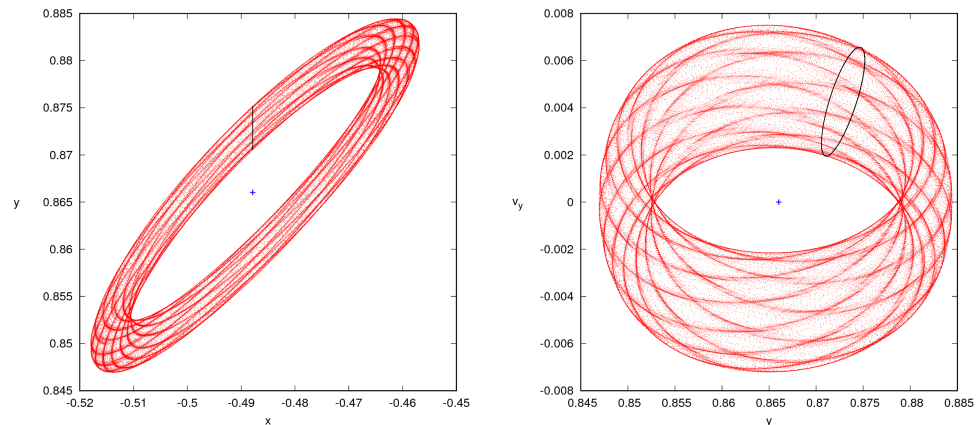


Figura 2: Trajetória quasi-confinada com $z_0 = 0.0$, $\alpha = 0.3375$, $\rho = 0.3 \times 10^{-3}$ no plano $x-y$ (esquerda) e no plano $y-\dot{y}$ (direita).

Por outro lado, a Figura (3) ilustra duas trajetórias que permanecem em torno do ponto L_5 com condições iniciais com $z_0 = 0.5$ (esquerda) e $z_0 = 0.75$ (direita) na seção de Poincaré definida por $z = 0$, $\dot{z} > 0$. A dinâmica corresponde a movimentos com grande amplitude vertical em torno do ponto de equilíbrio. No caso de $z_0 = 0.5$ a condição inicial tem $\alpha = 0.335$ e $\rho = -0.07609749$. A constante de Jacobi é $C = 2.75757350$ e o escape é detectado após 3.4037×10^3 revoluções dos primários, o que corresponde à 2×10^4 iterações do mapa de Poincaré. A amplitude vertical do movimento é cerca de 211,420.0 km, e as distâncias mínima e máxima à L_5 são, respectivamente, 11,532.0 km e 284,456.0 km.

Já no caso mostrado à direita, a trajetória com $z_0 = 0.75$ é dada por $\alpha = 0.3335$, $\rho = -0.11935105$, com $C = 2.50510607$. O movimento com amplitude vertical de 289,068.8 km permanece em torno de L_5 por mais de 10^6 revoluções dos primários. Foram plotadas as primeiras 10^5 iterações do mapa de Poincaré iterates, exibindo apenas um a cada cinco pontos. As distâncias mínima e máxima à L_5 são, respectivamente, 12,300.8 km e 341,846.92 km.

Nos exemplos mostrados na Figura (3), as trajetórias recobrem aproximadamente toros invariante tridimensionais durante o tempo em que permanecem confinadas.

Devido à proximidade com a Terra, às propriedades de estabilidade e ao fato de serem livres de colisão, essas órbitas em torno do ponto L_5 podem fornecer boas localizações para operações de longo termo visando a exploração de asteroides.

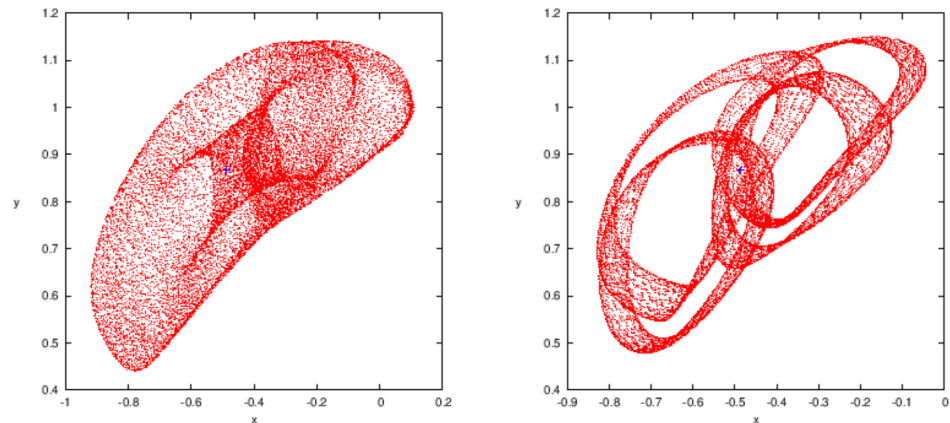


Figura 3: Trajetórias quasi-confinadas com $z_0 = 0.5$, $\alpha = 0.3335$, $\rho = -0.07609749$ (esquerda), e $z_0 = 0.75$, $\alpha = 0.3335$, $\rho = -0.11935105$ (direita).

4 Conclusões

Detectamos numericamente regiões de estabilidade efetiva em torno do ponto de equilíbrio Lagrangeano L_5 do sistema Terra-Lua, ilustrando o comportamento típico das trajetórias confinadas. Resultados análogos são válidos para o ponto L_4 devido à simetria de reversibilidade temporal. Devido às suas características dinâmicas, estas trajetórias podem propiciar boas órbitas de estacionamento para asteroides capturados no espaço cislunar visando a exploração dos seus recursos minerais.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) através dos processos 2013/07174-4 e 2018/00059-9. A autora agradece à Profa. Dra. Maisa de Oliveira Terra e ao Prof. Dr. Carles Simó por discussões frutíferas e colaboração continuada.

Referências

- [1] H.-X. Baoyin, Y. Chen, J.-F. Li. Capturing near earth objects. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 10:587–598, 2010.
- [2] J. R. Brophy, B. k. Muirhead. Near-Earth Asteroid Retrieval Mission (ARM) study. In *33rd International Electric Propulsion Conference*, Washington, DC, 2013. Paper number IEPC-2013-82.
- [3] L. Capdevila, D. Guzzetti, K. Howell. Various transfer options from Earth into distant retrograde orbits in the vicinity of the Moon. In *24th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Santa Fe, Mexico, 2014. Paper number AAS 14-467.

- [4] A. Giorgilli, A. Delshams, E. Fontich, L. Galgani, C. Simó. Effective stability for a hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the Restricted Three-Body Problem. *Journal of Differential Equations*, 77:167–370, 1989.
- [5] D. García Yárnoz, J. Sanchez, C. McInnes. Easily retrievable objects among the NEO population. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 116:367–388, 2013.
- [6] A. Jorba, M. Zou. A Software Package for the Numerical Integration of ODEs by Means of High-Order Taylor Methods. *Experimental Mathematics*, 14:1:99–117, 2005.
- [7] W. Koon, M. Lo, J. Marsden, S. Ross. *Dynamical Systems, The Three-Body Problem, and Space Mission Design*. Springer-Verlag, 2006.
- [8] D. Landau, J. Dankanich, N. Strange, J. Bellerose, P. Llanos, M. Tantardini. Trajectories to nab a NEA (Near-Earth Asteroid), In *AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting*, Kauai, HI, 2013. Paper number AAS 13-409.
- [9] J. Marsden, S. Ross. New methods in celestial mechanics and mission design. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 43:43–73, 2005.
- [10] A.P. Markeev. Stability of the triangular Lagrangian solutions of the restricted three-body problem in the three-dimensional circular case. *Soviet Astronomy*, 15:682–686, 1972.
- [11] J. Sanchez, C. McInnes, Assessment on the feasibility of future shepherding of asteroid resources. *Acta Astronautica*, 73:49–66, 2012.
- [12] P. Robutel, J. Souchay. An introduction to the dynamics of Trojan asteroids In *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets*. Springer, 2010.
- [13] C. Simó. Effective computations in Celestial Mechanics and Astrodynamics. In *Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications*. Springer, 1998.
- [14] C. Simó, P. Sousa-Siva, M. Terra. Practical stability domains near $L_{4,5}$ in the Restricted Three-Body Problem: some preliminary facts. In *Progress and Challenges in Dynamical Systems*. Springer, 2014.
- [15] P. A. Sousa-Silva, M. O. Terra. A survey of different classes of Earth-to-Moon trajectories in the patched three-body approach. *Acta Astronautica*, 123:340–349, 2016.
- [16] M. Terra, C. Simó, P. Sousa-Silva. Evidences of diffusion related to the center manifold of L_3 of the SRTBP. In *Proceedings of the 65th International Astronautical Congress*, Toronto, 2014. Paper Number IAC-14-C1.1.8.
- [17] P. E. Verrier, C. R. McInnes. Low-energy capture of asteroids onto Kolmogorov-Arnold-Moser tori. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 38:330–335, 2015.