

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aspectos Biomatemáticos de Funções de Taper via Conceitos Estocásticos

Raylan Ramos de Sa¹

Departamento de Engenharia Florestal, UFT, Gurupi, TO

Bárbara Maria Martins Santos²

Departamento de Engenharia Florestal, UFT, Gurupi, TO

Pedro Henrique Lacerda Rosa³

Departamento de Agronomia, UFT, Gurupi, TO

Rasdony Klaiver Figueredo Sousa⁴

Departamento de Engenharia Florestal, UFT, Gurupi, TO

Camila Rodrigues Resende⁵

Departamento de Engenharia Florestal, UFT, Gurupi, TO

Cibele Cristina Trinca Watanabe⁶

Departamento de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia, UFT, Gurupi, TO

Ricardo Augusto Watanabe⁷

Departamento de Matemática Aplicada-IMECC, UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. As funções de afilamento (de taper) são modelos utilizados para o cálculo de sortimentos florestais devido à grande flexibilidade em estimar diâmetros em qualquer altura, alturas em qualquer diâmetro e volumes parciais, totais e comerciais do tronco de árvores. O ajuste destas funções de taper para multiprodutos significa obter uma boa aproximação ou melhora na estimativa de diâmetros, alturas e volumes do tronco de árvores. O objetivo deste trabalho é o refinamento de três dos principais modelos de taper os quais são denominados modelo de Kozak Modificado, Demaerschalk Modificado e Ormerod Modificado. Para o respectivo estudo de refinamento serão utilizados processos estocásticos.

Palavras-chave. Funções de Taper, Ajuste de Funções de Taper, Processos Estocásticos

1 Introdução

O termo taper (afilamento do fuste) é utilizado para expressar a taxa de decréscimo do diâmetro ao longo de um fuste. Estudos de taper baseiam-se em equações que permi-

¹raylangpi2015@gmail.com

²barbaramartins1997@hotmail.com

³pedro13hr@gmail.com

⁴rasdony@hotmail.com

⁵camila-rodriques.r@hotmail.com

⁶cibtrinca@yahoo.com.br

⁷ricardoaw18@gmail.com

tem estimar o diâmetro em qualquer altura ao longo do fuste a partir das variáveis d_{ap} (diâmetro, com casca, medido na altura de 1,30m) e H (altura total). Em consequência, as equações de taper servem também para estimar a altura onde um determinado diâmetro ocorre e o volume de partes do fuste, ou seja, quantificam os multiprodutos da madeira. Segue que [2] é uma ótima referência ao leitor interessado no assunto.

As funções de afilamento são equações que descrevem a forma e o afilamento das árvores e representam a variação diamétrica ao longo do fuste em função do diâmetro à altura do peito (d_{ap}) e da altura total. O afilamento do tronco é o decréscimo do diâmetro do fuste da base para o topo ou o adelgaçamento do fuste e pode ser expresso por uma função matemática que descreve a tendência dessa variação [1].

Segundo [8], as funções de afilamento são uma importante ferramenta para a determinação do volume de árvores e toras por permitirem estimar três características básicas das árvores: o diâmetro em qualquer ponto do fuste, a altura no fuste em que se encontra um determinado diâmetro e o volume entre dois pontos quaisquer no fuste.

Muitas funções de taper propostas têm resultado em boas estimativas do perfil, porém o mesmo não ocorre com as estimativas do volume devido à ocorrência de bias, variando consideravelmente com a posição no fuste e com seu porte.

Estudo conduzido por Demaerschalk [3,4] pode explicar esta inconsistência. Segundo este autor, a maioria das equações de volume pode ser convertida em funções de taper compatíveis, significando que equações de taper e volume dão resultados idênticos para o volume total. Mais especificamente, há compatibilidade quando o volume total, obtido pela soma dos volumes de todas as seções determinadas através de uma equação de taper, é idêntico ao volume definido pela equação de volume. Isto significa que a integração da equação de taper resulta no mesmo volume dado pela equação do volume. Resultados positivos desta compatibilidade podem, por exemplo, evitar que o usuário fique confuso ao confrontar análises de taper. Esta confusão ocorre quando o usuário, após somar os volumes das seções, encontra um volume total muito diferente daquele obtido com uma equação de volume.

Este trabalho tem como objetivo obter o refinamento de três dos principais modelos de taper os quais são denominados modelo de Kozak modificado, Demaerschalk modificado e Ormerod modificado com o objetivo de obter um ajuste destas funções de taper para multiprodutos para se obter uma melhora na estimativa de diâmetros, alturas e volumes do tronco de árvores. Processos estocásticos são utilizados para tal refinamento.

A idéia central para os correspondentes modelos visa manter o comportamento global do modelo original e focar nos fatores biológicos que causam perturbações no crescimento da árvore.

2 Método de Ajuste das Funções de Taper

Os modelos de Kozak Modificado [6], Demaerschalk Modificado [4] e Ormerod Modificado [7] são dados, respectivamente, da seguinte forma:

$$Y^2 = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h}{H} \right) + \beta_2 \left(\frac{h}{H} \right)^2 + \beta_3 T_x + \epsilon, \quad (1)$$

$$Y^2 = 10^{2\beta_0} dap^{(2\beta_1-2)} H^{2\beta_2} (H-h)^{2\beta_3} e^{\beta_4 T_x} + \epsilon, \tag{2}$$

$$Y^2 = \left[\frac{(H-h)}{(H-1,30)} \right]^{2\beta_1} e^{\beta_2 T_x} + \epsilon, \tag{3}$$

onde $Y = \frac{d}{d_{ap}}$; d é o diâmetro comercial, com ou sem casca, em centímetro, na altura h ; d_{ap} é o diâmetro, em centímetro, medido na altura de 1,30 m; h é a altura, em metros, onde ocorre o diâmetro comercial d ; H é a altura total, em metros; $T_x = 0$ para diâmetro com casca e $T_x = 1$ para diâmetro sem casca; $\beta_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$, são parâmetros de regressão e ϵ é o erro aleatório, onde $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

Neste trabalho, utilizamos processos estocásticos para o estudo de refinamento das correspondentes funções de taper. Sendo assim, utilizamos o método de diferenças finitas estocásticas [5] (Capítulo 4) para discretizar e simular as equações (1), (2) e (3) a fim de estudarmos a dinâmica do processo.

Devido a agentes externos, como seca prolongada, adubação indevida e empobrecimento do solo, é possível considerarmos a ação de ruído (perturbação) na altura h_n a qual depende do diâmetro d_n da função de taper. Assim, os correspondentes refinamentos em estudo para os três modelos são dados da seguinte forma:

$$Y_n^2 = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{H_n + Z_n}{H} \right) + \beta_2 \left(\frac{H_n + Z_n}{H} \right)^2 + \beta_3 T_x, \tag{4}$$

$$Y_n^2 = 10^{2\beta_0} dap^{(2\beta_1-2)} H^{2\beta_2} (H - H_n + Z_n)^{2\beta_3} e^{\beta_4 T_x}, \tag{5}$$

$$Y_n^2 = \left[\frac{(H - H_n + Z_n)}{(H - 1,30)} \right]^{2\beta_1} e^{\beta_2 T_x}, \tag{6}$$

onde H_n, D_n e Z_n são processos estocásticos e assumimos que $E(Z_n) = 0$ e $var(Z_n) = \sigma^2 = \text{constante}$. Observe que a altura comercial h_n e o diâmetro d_n são substituídos pelos processos estocásticos H_n e D_n , respectivamente.

A partir desta metodologia, simulações são realizadas e os resultados são devidamente analisados juntamente com comparações entre os processos (1-3) e (4-6) com dados coletados na literatura [1] a fim de se encontrar fatores biológicos para tais processos.

3 Simulações e Resultados

Nesta seção, os gráficos apresentados são provenientes das simulações das equações (4), (5) e (6). Tanto os efeitos da perturbação aleatória quanto as variáveis aleatórias possuem distribuição normal. Existe ainda um *tradeoff* entre os modelos citados para o cálculo do fuste, por exemplo, a estimativa do diâmetro pode ser aconselhável em um modelo, porém a altura pode ser incoerente [2]. Para comparações gerais entre os modelos e os diferentes tipos de árvores que podem ser estudados, bem como os parâmetros utilizados nas simulações, consulte [2].

A idéia central para os três modelos propostos neste trabalho visa estudar o comportamento global do modelo original e como certos fatores podem influenciar a maximização do fuste. O estudo visa englobar aspectos biológicos que afetam o crescimento da árvore estudada, tais como: seca prolongada, adubação indevida e empobrecimento do solo.

3.1 Modelo de Kozak modificado

O modelo de Kozak modificado é dado através da Equação (1). O correspondente refinamento para o modelo de Kozak modificado fora apresentado na equação (4).

Note que as equações (1) e (4) representam equações de grau dois para a variável h , logo, dependendo dos parâmetros, podem ocorrer situações que não possuem sentido biológico: alturas negativas ou alturas biologicamente inexistentes para o tipo de árvore modelada [2].

Ao observar a Figura 1, segue que o modelo de Kozak com casca apresenta um maior decrescimento do diâmetro do fuste e o modelo de Kozak com casca com ruído apresenta um menor decrescimento do diâmetro do fuste. Os modelos de Kozak sem casca (sem e com ruído) apresentam o mesmo comportamento e o efeito do ruído não ultrapassa a ordem de 1.

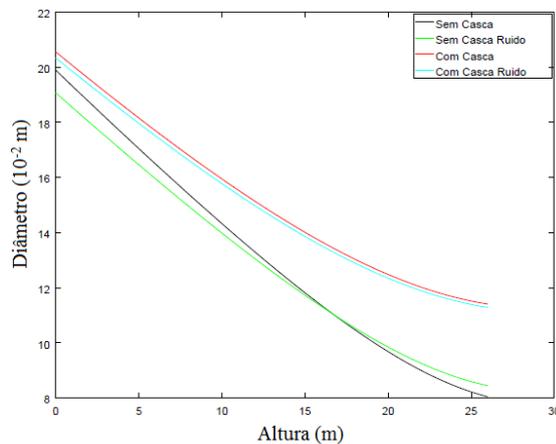


Figura 1: Modelo de Kozak.

Nas Figuras 2 e 3, segue que não há diferença significativa ao considerar o refinamento para efeito de maximização do fuste.

3.2 Modelo de Demaerschalk modificado

O modelo de Demaerschalk modificado é dado através da Equação (2). O correspondente refinamento para o modelo de Demaerschalk modificado fora apresentado na equação (5).

Na Figura 4, segue que os modelos de Demaerschalk com casca (sem e com ruído) apresentam um maior decrescimento do diâmetro do fuste e o efeito do ruído não ultrapassa a ordem de aproximadamente de 5 cm.

Na Figura 5, os modelos de Demaerschalk com casca com ruído e com casca refinado são comparados e nota-se um aumento significativo na maximização do fuste. O mesmo não ocorre no caso sem casa (Figura 6), onde a diferença é desprezível.

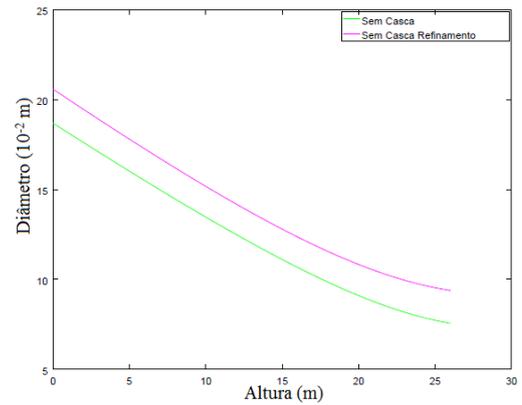
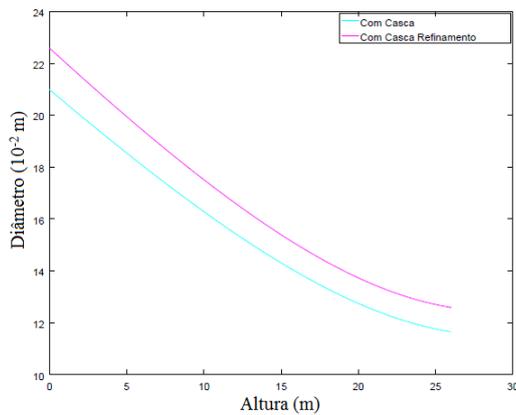


Figura 2: Modelo de Kozak com casca refi-

Figura 3: Modelo de Kozak sem casca refi-
nado.

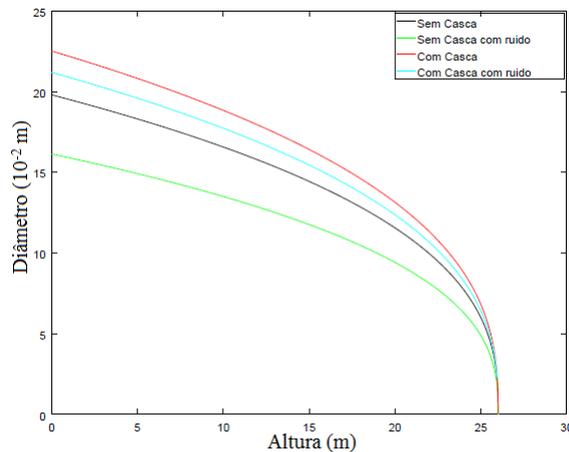


Figura 4: Modelo de Demaerschalk.

3.3 Modelo de Ormerod modificado

O modelo de Ormerod modificado é dado através da Equação (3) e é representado na Figura 7. O correspondente refinamento para o modelo de Ormerod modificado fora apresentado na equação (6).

Na Figura 8, os modelos de Ormerod com casca com ruído e com casca refinado apresentam um aumento significativo no diâmetro do fuste e, portanto, em sua respectiva maximização. Na Figura 9, os modelos de Ormerod sem casca com ruído e sem casca refinado apresentam um aumento pouco significativo na maximização do fuste.

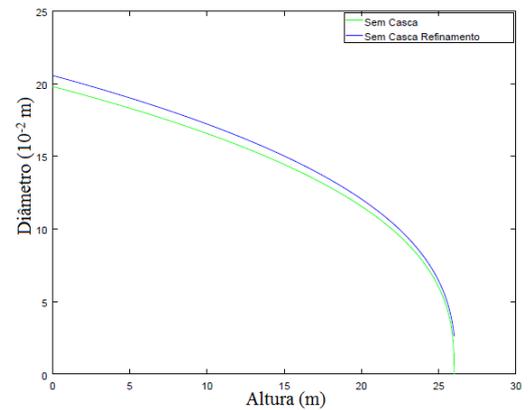
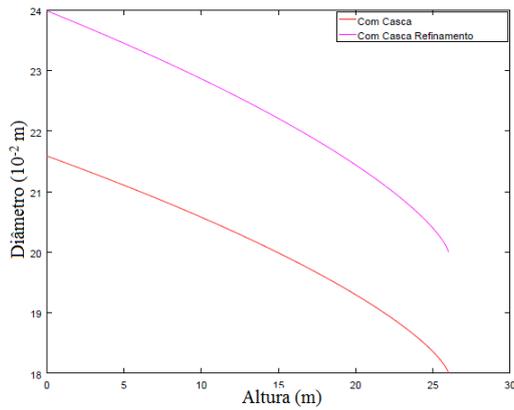


Figura 5: Modelo de Demaerschalk com casca refinado.

Figura 6: Modelo de Demaerschalk sem casca refinado.

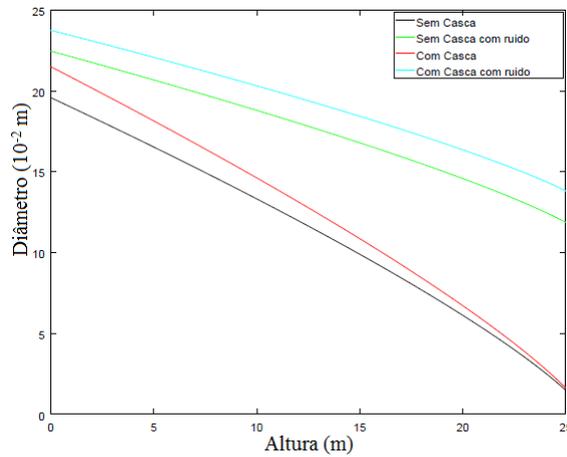


Figura 7: Modelo de Ormerod.

4 Conclusões

A indústria madeireira requer análise quantitativa do fuste e da altura de árvores, porém ambos os fatores estão sujeitos a agentes biológicos externos. Portanto, é condizente modelar a ação de tais agentes de modo estocástico.

Neste trabalho, analisamos o comportamento global de modelos cuja variável aleatória atua diretamente na altura e no diâmetro da árvore. Ao compararmos a modelos tradicionais da literatura, concluímos que o comportamento global é mantido e tais efeitos são da ordem de centímetros, mas que podem acarretar ganhos ou perdas para a indústria madeireira.

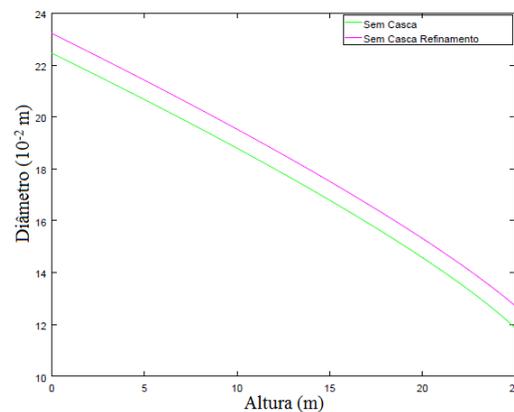
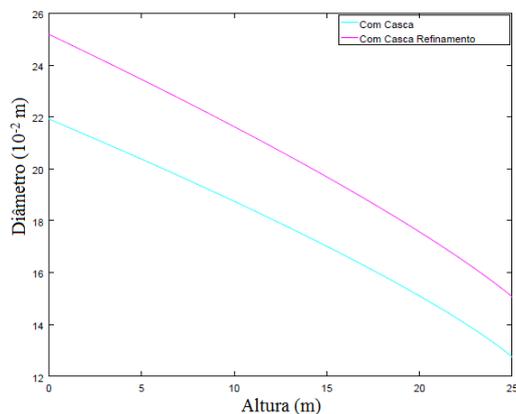


Figura 8: Modelo de Ormerod com casca re- Figura 9: Modelo de Ormerod sem casca re-
finado. finado.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da UFT (Universidade Federal do Tocantins).

Referências

- [1] J. F. Borges, Seccionamento do fuste de *Pinus taeda* L. para a obtenção do volume de madeira serrada através da função de forma polinomial, Dissertação de Mestrado, UFPR, 1981.
- [2] J. C. C. Campos and H. G. Leite. *Mensuração Florestal: perguntas e respostas*. Editora UFV, Viçosa-MG, 2016.
- [3] J. P. Demaerschalk. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume, *Can. J. For. R.*, 03:90–94, 1972.
- [4] J. P. Demaerschalk. Converting volume equations to compatible taper equations, *Forest Science*, 18:241–245, 1972.
- [5] M. Kamiński. *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*. Editora John Wiley and Sons, New Jersey-EUA, 2013.
- [6] A. Kozak, D. D. Munro and J. H. G. Smith. Taper functions and their application in forest inventory, *Forestry Chronicle*, 45:278–283, 1969.
- [7] D. W. Ormerod. A simple bole model, *Forestry Chronicle*, 49:136–138, 1973.
- [8] M. Prodan et al. *Mensura Florestal*. IICA, San José, 1997.