Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelagem Determinística de Transferência Radiativa em Vegetações

Patricia Rodrigues Fortes[1]; Mariza Camargo[2]
Departamento de Engenharia e Tecnologia Ambiental, UFSM, Frederico Westphalen, RS
Solange R. Cromianski[3]
Curso de Matemática, UNIFAP, Campus Marco Zero - Macapá, AP
Liliane Basso Barichello[4]
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Neste trabalho, o problema de transporte de fótons em copas de vegetação densa é considerado. O meio modelado é homogêneo e propriedades como reflectância na vegetação e absorção do solo são avaliadas. Para tanto, a solução da aproximação em ordenadas discretas da equação de trasferência radiativa é obtida através do método analítico de ordenadas discretas, pelo qual a solução é explícita na variável espacial. A incidência localizada de radiação leva à necessidade do tratamento de problemas não homogêneos para os quais soluções particulares devem ser derivadas. Resultados numéricos para reflectância e transmitância são obtidos e comparados de forma satisfatória com a literatura.

Palavras-chave. Método de Ordenadas Discretas Analítico, Transferência Radiativa, Reflectância, Transmitância, Meios Não Homogêneos.

1 Introdução

Os estudos envolvendo problemas de transferência radiativa em copas de vegetações [9] são instrumentos de pesquisas da área de sensoriamento remoto, onde são investigadas maneiras mais eficientes e econômicas de se coletar dados necessários ao monitoramento e modelagem da radiação em meio vegetal. A partir do entendimento de tais problemas e obtenção de soluções analíticas ou numéricas, torna-se possível comparações entre desenvolvimentos teóricos e medidas experimentais, bem como podem ser estabelecidas estimativas de parâmetros do modelo que caracterizam a vegetação. Também, há interesse no desenvolvimento da teoria associada à transferência radiativa para interligá-la a dados da fotossíntese de folhas e assim avaliar a produtividade das copas de vegetações [6, 8].

Neste trabalho investigamos um caso específico tratado por Shultis e Myneni [10], cujo modelo matemático foi obtido calculando-se a média sobre o ângulo azimutal da equação linear de Boltzmann. Com a dependência do ângulo azimutal simplificada na descrição

[1]patricia@ufsm.br
[2]mariza@ufsm.br
[3]sol.cromianski@gmail.com
[4]lbaric@mat.ufrgs.br

do espalhamento, a equação de transferência radiativa de interesse é definida em meio homogêneo unidimensional, com espalhamento isotrópico. Por outro lado, a modelagem da radiação incidente determina condições de contorno que envolvem a função delta de Dirac, exigindo tratamento diferenciado. Neste contexto, estendemos aqui a formulação derivada em trabalho anterior [4] para o caso de tratamento de problemas não homogêneos, incluindo soluções particulares derivadas a partir de funções de Green [11].

O artigo está organizado de forma a apresentar na Seção 2 a modelagem do problema baseado na equação de transferência radiativa, respectivas condições de contorno e subproblemas relacionados. Na sequência, descrevemos brevemente a solução decorrente da aplicação do método de Ordenadas Discretas Analitico – ADO – na resolução da equação unidimensional homogênea de transferência radiativa [4] e a obtenção da solução particular necessária. São apresentadas expressões para quantidades de interesse como reflectância na copa da vegetação e absorção da radiação pelo solo, e nossos resultados são comparados aos da referência [10] para o caso isotrópico.

2 Modelagem do Problema

A equação de transferência radiativa para o transporte de fótons em copas de vegetações, para o caso onde o espalhamento da radiação nas folhas do dossel é isotrópico e a orientação das folhas é aleatória, segundo Shultis e Myneni [10], pode ser escrita na forma

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau'} I(\tau', \mu) + I(\tau', \mu) = \frac{\varpi}{2} \int_{-1}^{1} I(\tau', \mu) d\mu, \tag{1}$$

onde $\tau' \in (0, \tau_0')$ é a variável óptica (adimensional), τ_0' é a espessura óptica do meio plano-paralelo, $\mu \in [-1, 1]$ é o cosseno do ângulo polar medido a partir do eixo τ' positivo e $\varpi \in [0, 1]$ é o albedo para espalhamento simples (relação entre o coeficiente de espalhamento e o coeficiente de extinção). Ainda, de acordo com [10], a equação (1) está sujeita às condições de contorno

$$I(0, \mu) = \frac{I_0}{2\pi} \delta(\mu - \mu_0) \quad \text{e} \quad I(\tau_0', -\mu) = 2r_s \int_0^1 \mu I(\tau_0', \mu) d\mu, \tag{2}$$

para $\mu > 0$, onde $\delta(\mu - \mu_0)$ é a função delta de Dirac, μ_0 é o ângulo de incidência da radiação sob a copa da vegetação, I_0 é a intensidade de radiação incidente na copa da vegetação e r_s é a reflectividade do solo.

Uma vez que a função delta compõe a formulação do modelo, seguimos a Ref. [7] e escrevemos

$$I(\tau', \mu) = I^0(\tau', \mu) + I^s(\tau', \mu), \tag{3}$$

onde $I^0(\tau', \mu)$ corresponde à parcela de intensidade de radiação não espalhada (que não sofreu colisão) e $I^s(\tau', \mu)$ quantifica a intensidade de radiação proveniente de espalhamentos ocorridos (uma ou mais vezes) na copa da vegetação.

Substituindo a expressão (3) na equação de transferência radiativa (1), e adotando a metodologia empregada em [7], obtemos dois problemas com suas respectivas condições

de contorno:
• **Problema 1** (Intensidade de radiação não espalhada):

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau'} I^0(\tau', \mu) + I^0(\tau', \mu) = 0 \tag{4}$$

com condições de contorno

$$I^0(0, \mu) = \frac{I_0}{2\pi}\delta(\mu - \mu_0) \ \text{ e } \ I^0(\tau_0', -\mu) = 0, \quad \text{para} \quad \mu > 0; \tag{5}$$

• **Problema 2** (Intensidade de radiação espalhada na copa da vegetação):

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau'} I^s(\tau', \mu) + I^s(\tau', \mu) = \frac{\varpi}{2}\int_{-1}^{1} I^s(\tau', \mu) d\mu + \frac{\varpi}{2}\int_{-1}^{1} I^0(\tau', \mu) d\mu \tag{6}$$

com condições de contorno

$$I^s(0, \mu) = 0 \ \text{ e } \ I^s(\tau_0', -\mu) = 2r_s\int_0^1 \mu I^s(\tau_0', \mu) d\mu + 2r_s\int_0^1 \mu I^0(\tau_0', \mu) d\mu, \quad \text{para} \quad \mu > 0. \tag{7}$$

Solucionando primeiramente o Problema 1 obtemos

$$I^0(\tau', \mu) = \frac{I_0}{2\pi}\delta(\mu - \mu_0) e^{-\tau'/\mu} \tag{8}$$

e a partir desta solução podemos reescrever o Problema 2 na forma

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau'} I^s(\tau', \mu) + I^s(\tau', \mu) = \frac{\varpi}{2}\int_{-1}^{1} I^s(\tau', \mu) d\mu + Q(\tau', \mu), \tag{9}$$

onde aqui denotamos o termo de fonte como

$$Q(\tau', \mu) = \frac{\varpi I_0}{4\pi} e^{-\tau'/\mu_0}, \tag{10}$$

sendo que para $\mu > 0$ temos as condições de contorno

$$I^s(0, \mu) = 0 \ \text{ e } \ I^s(\tau_0', -\mu) = 2r_s\int_0^1 \mu I^s(\tau_0', \mu) d\mu + \frac{r_s I_0}{\pi}\mu_0 e^{-\tau_0'/\mu_0}. \tag{11}$$

Como o Problema 2 é não homogêneo, vamos considerar

$$I^s(\tau', \mu) = I_h^s(\tau', \mu) + I_p^s(\tau', \mu) \tag{12}$$

em que $I_h^s(\tau', \mu)$ e $I_p^s(\tau', \mu)$ denotam, respectivamente, a solução geral da equação homogênea associada e uma solução particular da equação não homogênea (9).

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0293

3 Solução via Método ADO

Na referência [4] apresentamos o desenvolvimento detalhado de uma solução homogênea, pelo método ADO [2, 3], para problemas de transferência radiativa modelados tal como em (9), basta que em [4] seja considerado o caso isotrópico (admitir $L = 0$). Então, considerando [4] escrevemos, em forma matricial, a solução homogênea associada à equação (9) como

$$\mathbf{I}^h_\pm(\tau') = \sum_{j=1}^{N} \Big[A_j \mathbf{\Phi}_\pm(\nu_j) e^{-\tau'/\nu_j} + B_j \mathbf{\Phi}_\mp(\nu_j) e^{-(\tau_0' - \tau')/\nu_j} \Big], \tag{13}$$

com

$$\mathbf{I}^h_\pm(\tau') = \big[I^s_h(\tau', \pm\mu_1) \; I^s_h(\tau', \pm\mu_2) \; ... \; I^s_h(\tau', \pm\mu_N) \big]^T \tag{14}$$

e

$$\mathbf{\Phi}_\pm(\nu) = [\phi(\nu, \pm\mu_1) \; \phi(\nu, \pm\mu_2) \; ... \; \phi(\nu, \pm\mu_N)]^T \ , \tag{15}$$

onde μ_k para $k = 1, ..., N$ são os pontos do esquema de quadratura (arbitrário), definido sob o intervalo $(0, 1]$, e ν_k para $k = 1, ..., N$ são os autovalores [4] provenientes da aplicação do método ADO.

Os coeficientes A_j e B_j, para $j = 1, ..., N$, necessários na composição da solução homogênea $I^s_h(\tau', \mu)$ serão determinados através da imposição das condições de contorno (11), após especificação da solução particular $I^s_p(\tau', \mu)$.

De acordo com [11], utilizando funções de Green, podemos definir uma solução particular $I^s_p(\tau', \mu)$ para o Problema 2 como

$$\mathbf{I}^p_\pm(\tau') = \sum_{j=1}^{N} \Big[\mathcal{A}_j(\tau') \mathbf{\Phi}_\pm(\nu_j) + \mathcal{B}_j(\tau') \mathbf{\Phi}_\mp(\nu_j) \Big] \tag{16}$$

sendo que, escrevendo $\mathcal{A}_j(\tau')$ e $\mathcal{B}_j(\tau')$ em notação vetorial temos:

$$\mathcal{A}_j(\tau') = \frac{\mu_0 \nu_j}{N^*(\nu_j)} C(\tau' : \nu_j, \mu_0) \Big[\mathbf{\Phi}^T_+(\nu_j) \mathbf{W} \mathbf{Q}_+ + \mathbf{\Phi}^T_-(\nu_j) \mathbf{W} \mathbf{Q}_- \Big] \tag{17}$$

e

$$\mathcal{B}_j(\tau') = \frac{\mu_0 \nu_j}{N^*(\nu_j)} e^{-\tau/\mu_0} S(\tau_0 - \tau' : \nu_j, \mu_0) \Big[\mathbf{\Phi}^T_-(\nu_j) \mathbf{W} \mathbf{Q}_+ + \mathbf{\Phi}^T_+(\nu_j) \mathbf{W} \mathbf{Q}_- \Big] \tag{18}$$

com

$$N^*(\nu_j) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu_i \Big[\phi^2(\nu_j, \mu_i) - \phi^2(\nu_j, -\mu_i) \Big], \tag{19}$$

$$C(\tau' : \nu_j, \mu_0) = \frac{e^{-\tau'/\nu_j} - e^{-\tau'/\mu_0}}{\nu_j - \mu_0} \ \text{ e } \ S(\tau_0 - \tau' : \nu_j, \mu_0) = \frac{1 - e^{-(\tau_0 - \tau')/\nu_j} e^{-(\tau_0 - \tau')/\mu_0}}{\nu_j + \mu_0}, \tag{20}$$

$\mathbf{\Phi}^T_\pm(\nu_j)$ é dada na equação (15),

$$\mathbf{W} = \text{diag}\big\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_N \big\} \tag{21}$$

e

$$\mathbf{Q}_{\pm} = [Q(\pm\mu_1)\ Q(\pm\mu_2)\ ...\ Q(\pm\mu_N)]^T \quad \text{onde} \quad Q(\pm\mu_i) = \frac{\varpi I_0}{4\pi}. \tag{22}$$

Notamos, neste ponto, que neste trabalho particularmente o termo de fonte Q é constante, simplificando avaliações das expressões acima. Após a obtenção da solução particular torna-se necessário determinar as constantes A_j e B_j, com $j = 1, ..., N$, para finalizar a composição da solução homogênea $I_h^s(\tau', \mu)$. Estas constantes são obtidas mediante substituição das equações (13) e (16) em ambas as condições de contorno (11), fato que resulta em um sistema linear de ordem $2N \times 2N$.

Em termos da intensidade de radiação definimos, de acordo com as especificações empregadas na modelagem do problema [10]

- *Reflectância na copa da vegetação*:

$$R(\mu_0) = \frac{2\pi}{\mu_0 I_0} \int_0^1 \mu I^s(0, -\mu) d\mu. \tag{23}$$

- *Absorção da radiação pelo solo*:

$$A_s(\mu_0) = \frac{2\pi(1 - r_s)}{\mu_0 I_0} \Big[\int_0^1 \mu I^s(\tau_0', \mu) d\mu + \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} e^{-\frac{\tau_0'}{\mu_0}} \Big]. \tag{24}$$

- *Absorção de energia no próprio dossel* (copa da vegetação):

$$A_c(\mu_0) = 1 - R(\mu_0) - A_s(\mu_0). \tag{25}$$

4 Resultados e Comentários Finais

Shultis e Myneni [10] apresentaram modelos matemáticos que abordam a equação de transporte de fótons na copa de vegetações, assumindo genericamente a ocorrência de espalhamento anisotópico. No referido trabalho, foi empregada uma versão modificada do Método de Ordenadas Discretas (DOM) [5], com tratamento numérico da variável espacial, para resolver a equação de transporte idealizada para o transporte de fótons em copas de diferentes espécies de cultivos agrícola (soja, milho), sendo que os resultados foram comparados com dados teóricos e experimentais. Na mesma referência, os autores discutiram o caso de espalhamento isotrópico, objeto do presente trabalho, sendo que resultados numéricos foram apresentados (com quatro casas decimais) para estimativas de reflectância na copa da vegetação, absorção de radiação pelo solo e absorção de energia na copa da vegetação, admitindo os parâmetros $\tau_0' = 2, 0$, $I_0 = 1, 0$ e $r_s = 0, 1$.

Os resultados numéricos que obtivemos via solução ADO para estas mesmas quantidades de interesse, expressões (23) a (25), quando comparados aos resultados da referência [10], apresentam três casas decimais de concordância ao adotarmos $N = 2$, já atingindo, no entanto, com N=6, os quatros dígitos de concordância com [10]. De fato, tais dígitos se preservam a medida que aumentamos N, testado até $N = 800$.

Na Tabela 1 reproduzimos os valores que obtivemos com a aplicação do método ADO na avaliação de reflectância na copa da vegetação, absorção de radiação pelo solo e absorção

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0293

Tabela 1: Resultados ADO com $N = 6$, $\tau_0' = 2,0$, $I_0 = 1,0$ e $r_s = 0,1$

ϖ	μ_0	$R(\mu_0)$	$A_s(\mu_0)$	$A_c(\mu_0)$
0,35	0,5	0,0990	0,0383	0,8627
	1,0	0,0702	0,1510	0,7789
0,20	0,5	0,0510	0,0267	0,9224
	1,0	0.0360	0.1358	0.8282

de energia na copa da vegetação, usando dois dos valores de albedo sugeridos por Shultis e Myneni [10] representando meios de relevante absorção.

Ressaltamos que o problema de autovalores da formulação ADO baseia-se apenas nos pontos positivos da quadratura, portanto apresenta ordem reduzida (ordem $N/2$) se comparado aos de ordem N das metodologias usuais de aplicação do método de ordenadas discretas. Na avaliação da formulação ADO utilizamos o esquema de quadratura de Gauss-Legendre, mapeado sobre o intervalo (0, 1]. Os autovalores e autovetores que compõem a solução foram obtidos pelas subrotinas LAPACK [1], sendo usado um notebook com processador Intel Core i3, com 2.3 GHz e 4096 MB, e o tempo computacional exigido para obtenção dos resultados numéricos não ultrapassa um segundo, incluindo a geração de pontos e pesos do esquema de quadratura de Gauss-Legendre. Vale lembrar que o método ADO propicia uma solução analítica na variável espacial (e discreta na variável angular). Na referência [10], com aplicação do Método de Ordenadas Discretas, esta respectiva variável recebeu tratamento numérico. Além disso, uma solução particular válida para uma ampla classe de funções possibilitou o tratamento de problemas com incidência de radiação localizada.

Referências

[1] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. Mc-Kenney, D. Sorensen, LAPACK Users' guide. SIAM, Philadelphia, 1999.

[2] L.B. Barichello, C.E. Siewert, A Discrete-Ordinates Solution for a Non-Grey Model with Complete Frequency Redistribution, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62 (1999) 665-675.

[3] L.B. Barichello, C.E. Siewert, A New Version of the Discrete-Ordinates Method, *Proceedings: Computational Heat and Mass Transfer*, I (2002) 340-347.

[4] S.R. Cromianski, M. Camargo, P. Rodrigues, L.B. Barichello, Avaliação de Propriedades Radiativas em Meios Homogêneos Unidimensionais: Reflectância e Transmitância, *TEMA – Trends in Applied and Computational Mathematics*, 18, nº 3 (2017).

[5] J.J. Duderstadt, W.R. Martin, *Transport Theory*, Wiley, NY, 1979.

[6] B.D. Ganapol, L.F. Johnson, C.A. Hlavka, D.L. Peterson, B. Bond. LCM2: A coupled leaf/canopy radiative transfer model. Remote Sensing of Environment, 70 (1999) 153-166.

[7] L.R. Godinho, “Modelagem de Transferência Radiativa em Vegetações”. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, 2012.

[8] R.B. Myneni, J. Ross. (Eds.) Photon-Vegetation interactions: applications in optical remote sensing and plant ecology. Publisher: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1991. DOI: 10.1007/978-3-642-75389-3.

[9] P. Picca, R. Furfaro, Analytical discrete ordinate method for radiative transfer in dense vegetation canopies. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 118 (2013) 60-69, DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.12.007

[10] J.K. Shultis, R.B. Myneni, Radiative Transfer in Vegetation Canopies with Anisotropic Scattering, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 39 (1988) 115-129.

[11] C.E. Siewert, A Concise and Accurate Solution to Chandrasekhar’s Basic Problem in Radiative Transfer, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 64 (2000) 109-130.

