Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Perturbação de Uvarov aplicado à medida clássica de Jacobi

Tatiane Tambarussi
Depto de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP,
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: tatitambarussi@hotmail.com

Fernando R. Rafaeli
Depto de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: rafaeli@ibilce.unesp.br

Resumo: *O objetivo deste trabalho é apresentar polinômios ortogonais gerados por uma perturbação na medida. O caso que estudaremos é conhecido como medida de Uvarov. Os polinômios gerados pela medida de Uvarov poderam ser escritos através de uma Fórmula de Conexão, que nos permite analisar o comportamento monotônico e assintótico de seus zeros. Por fim aplicaremos estes resultados à medida clássica de Jacobi.*

Palavras-chave: *Polinômios Ortogonais, Medida, Uvarov.*

Neste trabalho vamos apresentar sequências de polinômios ortogonais com respeito a medida $d\phi_\lambda(x) = d\phi(x) + \lambda\delta(x-c)$, conhecida como perturbação de Uvarov, onde $d\phi(x)$ é uma medida positiva com suporte finito ou infinito no intervalo (a,b), $\delta(x-c)$ é o funcional Delta de Dirac no ponto c, em que $c \notin (a,b)$ e λ é um número real não negativo. Logo, os polinômios $p_n(\lambda, c; x)$ que descreveremos são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q\rangle_\lambda = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x) + \lambda p(c)q(c). \tag{1}$$

Para o nosso propósito, introduzimos os polinômios $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ e $\{r_n(c;x)\}_{n\geq 0}$ que são ortogonais com relação as medidas $d\phi(x)$ e $d\phi_2(x) = (x-c)^2 d\phi(x)$, respectivamente. Além desses polinômios definimos os polinômios núcleos $K_n(x,y)$ por

$$K_n(x,y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\|P_k\|^2}$$

onde $\|P_k\|^2 = \displaystyle\int_a^b P_n^2(x)d\phi(x)$.

O teorema abaixo nos mostra uma representação para esta família de polinômios ortogonais, com relação à medida $d\phi_\lambda(x)$ apresentando uma forma de escrevê-los, através de uma combinação linear de polinômios.

Teorema 1: [Fórmula de conexão] *Os polinômios $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$, com a normalização $\hat{p}_n(\lambda, c; x) = \kappa_n p_n(\lambda, c; x)$, onde $p_n(\lambda, c; x)$ é mônico, pode ser representado como*

$$\hat{p}_n(\lambda, c; x) = p_n(x) + \lambda B_n (x-c) r_{n-1}(c; x), \tag{2}$$

onde

$$B_n = \frac{-p_n(c)}{\langle x-c, r_{n-1}\rangle_\phi} = K_{n-1}(c,c) > 0 \tag{3}$$

e $\kappa_n = 1 + \lambda K_{n-1}(c,c)$.

O teorema a seguir aborda o entrelaçamento dos zeros $\{w_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ dos polinômios $\hat{p}_n(\lambda, c, x)$ com $\{y_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ e $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{n}$, zeros de $r_n(c; x)$ e $p_n(x)$ respectivamente. Através da representação sugerida pela Fórmula de Conexão, pode-se provar o entrelaçamento dos zeros de $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$ com os zeros de $p_n(x)$ e $(x-c)r_{n-1}(x)$. Além disso, obtém-se que esses zeros são funções monótonas com relação ao parâmetro λ e, quando $\lambda \to \infty$, os zeros de $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$ convergem para os zeros dos polinômios $r_{n-1}(c; x)$, com velocidade de convergência de ordem $1/\lambda$.

Teorema 2: *Seja $\lambda > 0$ e $\{y_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ os zeros dos polinômios $r_n(c; x)$ ortogonais com respeito à medida $d\phi_2(x)$.*

(i) Se $c \leq a$, então

$$c < w_{n,1} < x_{n,1} < y_{n-1,1} < x_{n,2} < \cdots < y_{n-1,n-1} < w_{n,n} < x_{n,n}. \tag{4}$$

Além disso, cada $w_{n,k}$ é uma função decrescente de λ e, para cada $k = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} w_{n,1} = c, \quad \lim_{\lambda\to\infty} w_{n,k+1} = y_{n-1,k},$$

bem como

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,[w_{n,1} - c] = \frac{-p_n(c)}{K_{n-1}(c,c)r_{n-1}(c)} \tag{5}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,[w_{n,k+1} - y_{n-1,k}] = \frac{-p_n(y_{n-1,k})}{K_{n-1}(c,c)(y_{n-1,k} - c)r'_{n-1}(y_{n-1,k})}. \tag{6}$$

(ii) Se $c \geq b$, então

$$x_{n,1} < w_{n,1} < y_{n-1,1} < \cdots < x_{n,n-1} < w_{n,n-1} < y_{n-1,n-1} < x_{n,n} < w_{n,n} < c. \tag{7}$$

Além disso, cada $w_{n,k}$ é uma função crescente de λ e, para cada $k = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} w_{n,n} = c, \quad \lim_{\lambda\to\infty} w_{n,k} = y_{n-1,k},$$

bem como

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,[c - w_{n,n}] = \frac{p_n(c)}{K_{n-1}(c,c)r_{n-1}(c)} \tag{8}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,[y_{n-1,k} - w_{n,k}] = \frac{p_n(y_{n-1,k})}{K_{n-1}(c,c)(y_{n-1,k} - c)r'_{n-1}(y_{n-1,k})}. \tag{9}$$

Vamos considerar alguns casos particulares da perturbação de Uvarov. No artigo de Huertas, Marcellán e Rafaeli [5] foi proposto a modificação da medida clássica de Jacobi através da perturbação de Uvarov.

A sequência de polinômios mônicos de Jacobi $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$, é ortogonal com relação á medida $d\phi_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$. Consideremos as seguintes perturbações na medida $d\phi_{\alpha,\beta}(x)$:

$$d\phi(\lambda, 1; x) = d\phi_{\alpha,\beta}(x) + \lambda\delta(x-1), \tag{10}$$

$$d\phi(\lambda, -1; x) = d\phi_{\alpha,\beta}(x) + \lambda\delta(x+1). \tag{11}$$

A partir, das medidas introduzidas em (10) e (11), obtemos duas novas famílias de polinômios ortogonais mônicos as quais, denotaremos por $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x)\}$ e $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x)\}$, respectivamente. Esses polinômios são conhecidos na literatura como polinômios ortogonais do tipo Jacobi ou polinômios ortogonais de Jacobi-Koornwinder. De fato eles apareceram pela primeira vez no trabalho de Koornwinder [8].

Com a normalização $\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, c; x) = \kappa_n p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, c; x)$ introduzida no Teorema 1, onde $\kappa_n = 1 + \lambda K_{n-1}(c, c)$ e $p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, c; x)$ é um polinômio do tipo Jacobi mônico, obtemos a Fórmula de Conexão para os polinômios $\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x)$:

$$\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x) = p_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \lambda K_{n-1}(1, 1)(x-1)p_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x). \tag{12}$$

Na equação (12), temos um polinômio tipo Jacobi escrito como combinação linear de um polinômio ortogonal com relação à medida $d\phi_{\alpha,\beta}(x)$, e outro com relação à medida $d\phi_2(x)$ resultando em um polinômio tipo Jacobi deslocado no parâmetro α, com isso podemos utilizar o Teorema 2, onde basta provar que os zeros desses polinômios se entrelaçam, e teremos hipóteses suficientes para analisar o comportamento dos zeros dos polinômios tipo Jacobi com relação a monotonicidade e assintoticidade.

Teorema 3: *Sejam $\alpha, \beta > -1$ e sejam $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ e $x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda) := x_{n,k}(\alpha, \beta; 1, \lambda)$, $k = 1, \cdots, n$, os zeros de $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x)$, respectivamente. Então vale a seguinte propriedade de entrelaçamento:*

$$\begin{aligned} &x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n-1,1}(\alpha+2, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta; \lambda) < \cdots < \\ &< x_{n,n-1}(\alpha, \beta) < x_{n,n-1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n-1,n-1}(\alpha+2, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda) < \quad 1, \end{aligned}$$

Além disso, cada $x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda)$ é uma função crescente de λ e, para $k = 1, \cdots, n-1$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda) = 1, \quad \lim_{\lambda\to\infty} x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda) = x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta), \tag{13}$$

e,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left[1 - x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda)\right] = g_n(\alpha, \beta), \tag{14}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \left[x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta) - x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda)\right] = \frac{\left[1 + x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)\right] g_n(\alpha, \beta)}{2(\alpha+2)}, \tag{15}$$

onde

$$g_n(\alpha, \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+2}\Gamma(n)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}. \tag{16}$$

Para ilustrar o resultado do Teorema observamos o gráfico do polinômio $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$, fixando $\lambda = 0$ para alguns valores de $\epsilon > 0$, observamos a monotonicidade dos zeros de $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$ com relação a λ.

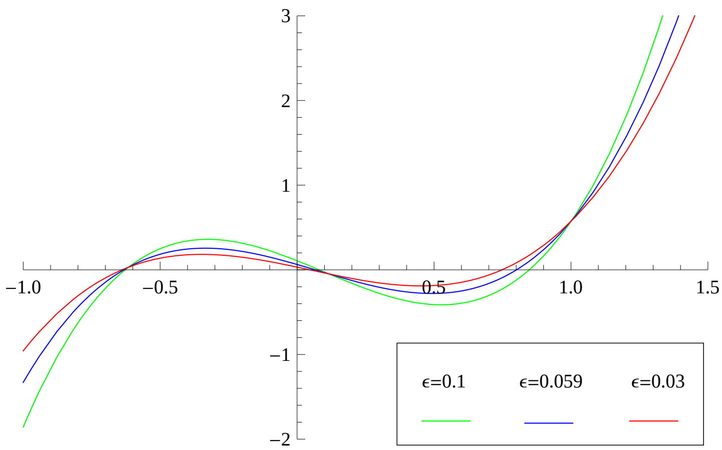

Figura 1: Gráfico de $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$

Na Tabela 1 apresentamos os zeros de $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda, 1; x)$ para alguns valores de λ. Notamos que todos os zeros desse polinômio crescem quando λ cresce, além disso, observamos que o último zero converge para 1 e os outros convergem para os zeros de $\hat{p}_2^{(3,1)}(x)$ que são $x_{2,1} = -0.615963$ e $x_{2,2} = 0.115963$.

λ	$x_{3,1}(1,1,\lambda)$	$x_{3,2}(1,1,\lambda)$	$x_{3,3}(1,1,\lambda)$
0	-0,654654	0	0,654654
1	-0,617598	0,111189	0,975159
10	-0,616132	0,115468	0,997353
100	-0,61598	0,115913	0,999734
1000	-0,615964	0,115958	0,999973

Tabela 1: Zeros de $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda, 1; x)$

Os mesmos resultados podem ser observados quando $c = -1$. Neste caso a Fórmula de Conexão para $\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x)$ é dada por

$$\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x) = p_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \lambda K_{n-1}(-1,-1)(x+1)p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x). \tag{17}$$

Através desta representação, pode-se provar o entrelaçamento dos zeros $\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x)$ com $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $(x+1)p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)$, podendo assim estudar o comportamento de seus zeros com relação ao parâmetro λ, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 4: *Sejam $\alpha, \beta > -1$ e sejam $x_{n,k}(\alpha,\beta)$ e $x_{n,k}(\alpha,\beta;\lambda) := x_{n,k}(\alpha,\beta;-1,\lambda)$, $k = 1, \cdots, n$, os zeros de $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x)$, respectivamente. Então vale a seguinte propriedade de entrelaçamento:*

$$\begin{aligned} -1 < x_{n,1}(\alpha,\beta;\lambda) < x_{n,1}(\alpha,\beta) < x_{n-1,1}(\alpha,\beta+2) < x_{n,2}(\alpha,\beta;\lambda) < x_{n,2}(\alpha,\beta) < \cdots \\ < x_{n-1,n-1}(\alpha,\beta+2) < x_{n,n}(\alpha,\beta;\lambda) < x_{n,n}(\alpha,\beta), \end{aligned}$$

Além disso, cada $x_{n,k}(\alpha,\beta;\lambda)$ é uma função decrescente de λ e, para $k = 1, \cdots, n-1$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} x_{n,1}(\alpha,\beta;\lambda) = -1, \quad \lim_{\lambda\to\infty} x_{n,k+1}(\alpha,\beta;\lambda) = x_{n-1,k}(\alpha,\beta+2), \tag{18}$$

e,

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\left[x_{n,1}(\alpha,\beta;\lambda)+1\right] = h_n(\alpha,\beta) \\ &\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\left[x_{n,k+1}(\alpha,\beta;\lambda) - x_{n-1,k}(\alpha,\beta+2)\right] = \frac{\left[1 - x_{n-1,k}(\alpha,\beta+2)\right] h_n(\alpha,\beta)}{2(\beta+2)}, \end{aligned} \tag{19}$$

onde

$$h_n(\alpha,\beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+2}\Gamma(n)\Gamma(\beta+2)\Gamma(\beta+3)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}. \tag{20}$$

Para ilustrar o resultado do Teorema 4, o gráfico do polinômio $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda+\epsilon, -1; x)$, fixando $\lambda = 0$ e para valores de $\epsilon > 0$, notamos o comportamento monótono dos zeros de $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda+\epsilon, 1; x)$ com relação a λ.

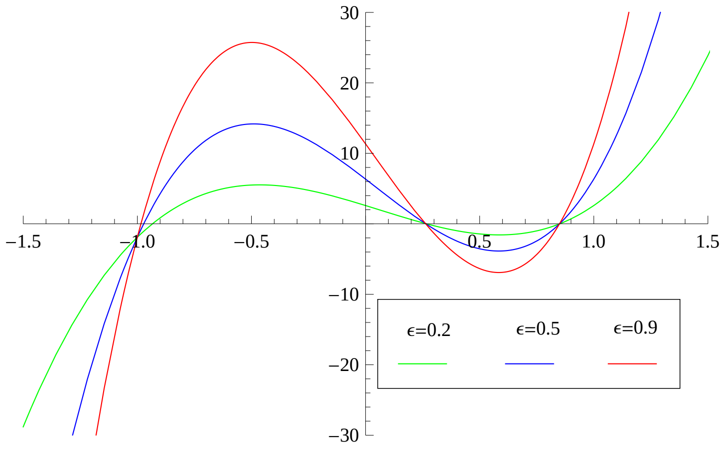

Figura 2: Gráfico de $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda+\epsilon,-1;x)$.

Na Tabela 2, apresentamos os zeros de $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda,-1;x)$ para alguns valores de λ. Notamos que todos os zeros desse polinômio decrescem quando λ cresce, além disso, observamos que o primeiro zero converge para -1, e os outros convergem para os zeros de $\hat{p}_2^{(0,5)}(x)$ que são $x_{2,1}=-0.261583$ e $x_{2,2}=0.849528$.

λ	$x_{3,1}(0,3,\lambda)$	$x_{3,2}(0,3,\lambda)$	$x_{3,3}(0,3,\lambda)$
0	-0,273471	0,397623	0,875848
1	-0,985755	0,262648	0,849745
10	-0,998551	0,26169	0,84955
100	-0,99985	0,261594	0,84953
1000	-0,999985	0,261584	0,849528

Tabela 2: Zeros de $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda,-1;x)$

Referências

[1] BRACCIALI, C. F., DIMITROV, D. K., RANGA, A. S. *"Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials"*, J. Comput. Appl. Math. 143 (2002) 95–106.

[2] CHIHARA, T. S., *"An Introduction to Orthogonal Polynomials"*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.

[3] DIMITROV, D. K., MARCELLÁN, F., RAFAELI, F. R. *"Monotonicity of zeros of Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials"*, J. Math. Anal. Appl. (2010) 80-89.

[4] DIMITROV, D. K., MELLO, M. V., RAFAELI, F. R. *"Monotonicity of zeros of Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials"*, J. Comput. Appl. Numer. Math. (2010) 263-276.

[5] HUERTAS,E. J., MARCELLÁN, F., RAFAELI, F.R., *"Zeros of orthogonal polynomials generated by canonical pertubations of measures"*, J. Comput. Appl. Math. 218 (2012) 7109-7127.

[6] HUERTAS,E. J., *"Analytic Properties of Krall-type and Sobolev-type Orthogonal Polynomials"*, Ph.D. Thesis, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, 2012.

[7] ISMAIL, M. E. H., *"Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable"*, Vol. 98 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. With two chapters by Walter Van Assche, With a foreword by Richard A. Askey.

[8] KOORNWINDER, T. H. *"Orthogonal polynomials with weight function* $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}+M\delta(x+1)+N\delta(x-1)$*"*, Canad. Math. Bull. 27 (1984) 205-214.

[9] OBRECHKOFF, N., *"Zeros of Polynomials"*, Acad. G. Bonchev, Bulgaria, Sofia, 2003.

[10] SZEGŐ, G., *"Orthogonal polynomials"*, American Math. Society, Colloq. Publ., New York, 23, 1939.

