Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Números de Catalan

Adriana Wagner[1]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS
Geovana Tavares Figueiredo[2]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS
Ludier Mariano Rosa[3]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS
Suellen da Silva[4]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS

1 Introdução

Os números de Catalan, foram definidos pelo matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894). Tal sequência de números, já fora anteriormente conhecida por Leonard Euler e Johann Andreas von Segner, no trabalho sobre a decomposição de polígonos convexos em triângulos por meio de suas diagonais. Esses números são de grande interesse por suas várias interpretações. Temos como objetivo neste trabalho estudar os números de Catalan, sua função geradora e uma de suas interpretações combinatórias, tendo como base [1] e [2]. Os estudos aqui apresentados foram e estão sendo realizados no projeto de pesquisa "Teoria de Números e Combinatória" de autoria da professora Adriana Wagner, pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus de Aquidauana, com a participação dos demais autores citados.

2 Números de Catalan

Os números de Catalan formam a sequência que possui como termos inicias os números $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \cdots$. Tal sequência foi originada a partir do seguinte problema, elaborado por Leonard Euler: Dado um polígono convexo de n lados, com $n \geq 3$, de quantas maneiras distintas podemos ligar as diagonais deste polígono de modo que seja triangulado e as diagonais não se cruzem? O número de maneiras de obter o resultado desejado denotaremos por T_n.

O matemático Johann Andreas von Segner obteve a seguinte relação de recorrência para tal problema, mas não apresentou um método para a obtenção da mesma,

$$T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_2. \tag{1}$$

O matemático Gabriel Lamé apresentou uma demonstração combinatória para tal relação, que mais tarde foi discutida pelo matemático Eugène Charles Catalan. O problema intitulado

[1]adriana.wagner@ufms.br
[2]tavares_geovana@hotmail.com
[3]ludier_mariano@hotmail.com
[4]suellensilva8@hotmail.com

por Euler foi então resolvido por Catalan utilizando a relação demonstrada por Lamé. Assim, denotando por C_n o n-ésimo número de Catalan e considerando que $T_n = C_{n-2}$ temos que

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \ \ e \ \ C_0 = 1. \tag{2}$$

3 Função Geradora

As funções geradoras são de suma importância nas resoluções de problemas combinatórios. Apresentaremos a função geradora para os números de Catalan, ou seja, dada a função abaixo o coeficiente de x^n será exatamente o n-ésimo número de Catalan, C_n,

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \tag{3}$$

Utilizando (2) em (3) e fazendo algumas manipulações algébricas obtemos uma fórmula para C_n, apresentada abaixo.

Proposição 3.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, o n-ésimo número de Catalan é definido por*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{4}$$

4 Interpretação Combinatória

Nosso objetivo é contar o número de maneiras distintas de traçar as diagonais de um polígono convexo de n lados, particionando-o em triângulos, de tal forma que as diagonais não se cruzem. Seja $n \geq 3$. Consideremos $T_2 = 1$ e T_n o número de triangulações válidas de um polígono convexo de n vértices rotulados, obtidos por meio das $n-3$ diagonais que não se interceptam. Assim, temos os seguintes resultados.

Teorema 4.1. *A sequência T_n, para todo $n \geq 3$, satisfaz*

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2} \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2}, \forall n \geq 4. \tag{5}$$

Teorema 4.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$T_{n+2} = C_n. \tag{6}$$

Portanto, do Teorema 4.2 obtemos que o número de triangulações em questão é determinado pela sequência dos números de Catalan.

Referências

[1] N. G. Brasil Junior, Bijeções envolvendo os Números de Catalan, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Unicamp, (2004).

[2] S. Forcey, M. Kafashan, M. Maleki and M. Strayer, Bjections for Catalan objects, *Journal of Integer Sequences*, volume 16, 2013.

