

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

## Uma Formulação Matemática Bi-objetiva para Alocação de Facilidades e Centros Consumidores

Angelo Aliano Filho<sup>1</sup>

Ana Paula da Silveira Vargas<sup>2</sup>

Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Cristiana Inês Judar<sup>3</sup>

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC – UNICAMP

### Resumo.

O presente estudo propõe uma formulação matemática inédita de programação não-linear inteira bi-objetiva e duas técnicas de resolução para alocação de facilidades e centros consumidores em uma rede composta de nós e arestas. O modelo aloca um conjunto de facilidades e clientes nos nós dados escolhendo, de maneira que (i) a distância entre as facilidades e os centros consumidores e (ii) entre as facilidades, ambas sejam minimizadas. O modelo prevê o atendimento da demanda de cada centro consumidor e respeita a capacidade máxima de distribuição de cada facilidade e, ainda, dimensiona o transbordo de mercadorias entre as facilidades e os consumidores. Para resolver estes modelos não-lineares, foi necessário empregar técnicas de linearizações de programação inteira e um método de escalarização multi-objetivo para determinar um conjunto de soluções eficientes. Testes computacionais iniciais permitiram gerar algumas destas soluções, auxiliando o decisor para que tenha mais segurança em sua tomada de decisão.

**Palavras-chave.** Pesquisa Operacional, Otimização Multi-objetivo, Modelagem Matemática.

## 1 Introdução

Entre os cenários analisados pela Pesquisa Operacional, está a localização de facilidades e de seus respectivos centros de consumo. Em diversas situações, tais como em sistemas de distribuição, as decisões da localização de facilidades e de designação de clientes a facilidades são feitas simultaneamente [3]. Além disto, a maioria dos problemas na vida prática são simultâneos e multi-objetivos, principalmente quando existe um certo grau de conflito entre os objetivos [2]. Problemas de localização têm grande importância prática, como por exemplo, na alocação de escolas, antenas de telecomunicações, otimização de rolamentos em trajetórias, localização de sensores uma rede de *wireless*, localização de indústrias acopladas a modelos de transporte, localização de organizações de saúde e muitas outras aplicações.

---

<sup>1</sup>angeloaliano@utfpr.edu.br

<sup>2</sup>anavargas@utfpr.edu.br

<sup>3</sup>crisjudar@hormail.com

O trabalho em [4] apresenta uma formulação para problemas de localização de facilidades, desejando-se minimizar o custo de *setup* e transporte, utilizando-se como base os problemas das  $p$ -medianas e  $p$ -centros, formando uma ponderação destes dois objetivos. O trabalho em [1], propõe um modelo de otimização inteira de alocações de facilidades que podem falhar na entrega do seu serviço e os clientes não têm informação nestas falhas antes de visitá-las. O (único) objetivo é localizar as  $p$  facilidades a fim de minimizar os custos com os deslocamentos.

O artigo em [5] desenvolve um modelo multi-objetivo de alocação de facilidades, usando o modelo de  $p$ -medianas e resolvendo-o usando-se uma soma ponderada com pesos positivos e negativos para determinar algumas soluções eficientes para o problema. O presente estudo desenvolve um modelo alternativo e inédito, não-linear e bi-objetivo inteiro de localizações, baseado no problema das  $p$ -medianas e dos  $p$ -centros, que visa (i) alocar os centros consumidores, (ii) as facilidades e (ii) determina a direção do fluxo entre eles. Sem dúvida, a formulação matemática proposta é mais sofisticados que os levantados na literatura recentes e justifica a contribuição para a área de otimização. A apresentação do modelo e testes computacionais, são apresentados nas próximas seções.

## 2 Modelagem matemática

Este problema que apresentamos tem uma conexão com o famoso Problema das  $p$ -medianas [3]. Suponhamos que em uma certa rede (nós, terrenos, lotes, quadras, etc), há  $r$  lugares disponíveis para comportar uma facilidade, centro de distribuição ou ficar vago. Suponha que queiramos escolher no máximo  $p$  facilidades para serem alocadas nestes nós e que existam exatamente  $q$  clientes (onde  $p + q \leq r$ ) com demandas  $dem_i$  conhecidas em um certo período. Suponhamos que conhecemos as distâncias entre os nós  $k$  e  $\bar{k}$ , dada por  $d_{k\bar{k}}$ . A cada cliente, apenas deve receber sua demanda de apenas uma facilidade. Porém, uma mesma facilidade pode atender a mais de um cliente. Queremos determinar onde cada cliente e facilidade será alocado, bem como qual será o fluxo entre os clientes e facilidades de modo que (i) a rota total e (ii) a soma entre todas as distâncias entre as facilidades, sejam minimizadas.

Para definir o modelo matemático que propomos, sejam:

- $i, j, k$ : índice das facilidades, clientes e nós, respectivamente;
- $p, q, r$ : número máximo de facilidades a serem criadas, clientes atendidos e nós disponíveis, respectivamente;
- $C_i$  e  $dem_j$ : capacidade máxima de atendimento da facilidade  $i$  e demanda do cliente  $j$ , respectivamente;
- $d_{k\bar{k}}$ : distância entre os nós  $k$  e  $\bar{k}$ .

As variáveis decisórias, para todo  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, q$  e  $k = 1, \dots, r$ , são dadas por:

- $x_{ij}$ : 1, se a facilidade  $i$  atenderá o cliente  $j$  e 0 em caso contrário.

- $y_{ik}$ : 1, se a facilidade  $i$  é alocada no nó  $k$  e 0 em caso contrário.
- $z_{jk}$ : 1, se o cliente  $j$  é alocado no nó  $k$  e 0 em caso contrário.
- $w_i$ : 1, se a facilidade  $i$  é instalada e 0 em caso contrário.

A formulação matemática não-linear bi-objetiva deste problema é apresentada a seguir.

$$\text{minimize } z_1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \sum_{\bar{k}=1}^r d_{k\bar{k}} \cdot x_{ij} \cdot y_{ik} \cdot z_{j\bar{k}} \quad (1)$$

$$\text{minimize } z_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{\bar{i}=1}^p \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\bar{k}=k+1}^r d_{k\bar{k}} \cdot y_{ik} \cdot y_{i\bar{k}} \quad (2)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{i=1}^p x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, q, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^p y_{ik} \leq 1, \quad k = 1, \dots, r, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^q z_{jk} \leq 1, \quad k = 1, \dots, r, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^r y_{ik} \leq 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^r z_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, q, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^r y_{ik} \leq w_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^q dem_j \cdot x_{ij} \leq C_i \cdot w_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad (9)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{k=1}^r y_{ik}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad (10)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{k=1}^r z_{jk}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^r y_{ik} \leq p, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r z_{jk} = q, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^p y_{ik} + \sum_{j=1}^q z_{jk} \leq 1, \quad k = 1, \dots, r, \quad (14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad y_{ik} \in \{0, 1\}, \quad z_{jk} \in \{0, 1\}, \quad w_i \in \{0, 1\}, \quad (15)$$

para todo  $i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r.$

A primeira função objetivo (1) visa minimizar a soma das distâncias entre as facilidades e os clientes instalados. Note que é uma função tri-linear, uma vez que esta distância apenas será somada, efetivamente, se existir um arco entre os nós  $k$  e  $\bar{k}$ ,  $y_{ik} = 1$  e  $z_{j\bar{k}} = 1$ . Veremos mais adiante uma maneira de escrevê-la de maneira linear.

A segunda função objetivo (2) é também não-linear e minimiza a soma de todas as distâncias entre as facilidades instaladas. É claro que a soma só irá crescer se  $y_{ik} = 1$  e  $y_{i\bar{k}} = 1$ , em qualquer outra situação os termos desta soma serão nulos.  $z_2$  será mínimo quando as facilidades estiverem localizadas da maneira mais “amontoadas” possível.

As restrições (3) forçam que cada cliente receba demanda de uma única facilidade. As restrições (4) e (5) impõem que, a cada nó, uma única facilidade e cliente sejam instalados, respectivamente. As restrições (6) e (7) obrigam que todas as facilidades e clientes sejam instalados no máximo uma vez em todos os nós, respectivamente. As restrições (8) e (9) ligam as variáveis  $w_i$  com  $y_{ik}$ , no seguinte sentido: se  $w_i = 0$  então  $y_{ik} = 0$ . Porém, se  $w_i = 1$ , então o atendimento da facilidade  $i$  não pode ultrapassar sua capacidade.

As restrições (10) ligam as variáveis  $y_{ik}$  com  $x_{ij}$  no seguinte senso: se a facilidade  $i$  não for instalada ( $\sum_{k=1}^r y_{ik} = 0$ ), então ela não pode atender nenhum cliente (ou seja  $x_{ij} = 0$ ). A mesma situação é para as restrições (11): se o cliente  $j$  não for instalado, então este não pode atendido.

As restrições (12) impõem um limite máximo de facilidades, enquanto (13) impõem que devem haver exatamente  $p$  clientes em toda rede. As restrições (14) dizem que, em cada nó, não pode haver um cliente e uma facilidade instalada ao mesmo tempo. Finalmente, (15) é o domínio de todas as variáveis decisórias deste problema.

Um agravante são as não linearidades  $x_{ij} \cdot y_{ik} \cdot z_{j\bar{k}}$  em  $z_1$  e  $y_{ik} \cdot y_{i\bar{k}}$  em  $z_2$ . Estes, por sua vez, podem ser linearizados da seguinte forma. Para  $z_1$ , seja  $\{0, 1\} \ni v_{ijk\bar{k}} = x_{ij} \cdot y_{ik} \cdot z_{j\bar{k}}$  que será 1 se todas as variáveis forem 1 e 0 em caso contrário. Então impondo as restrições lineares:

$$\begin{aligned} x_{ij} + y_{ik} + z_{j\bar{k}} - v_{ijk\bar{k}} &\leq 2, \\ -x_{ij} - y_{ik} - z_{j\bar{k}} + 3v_{ijk\bar{k}} &\leq 0, \end{aligned} \tag{16}$$

para  $i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r, \quad \bar{k} = 1, \dots, r,$  teremos uma linearização do modelo original para a função  $z_1$  respeitando tal condição.

Para  $z_2$ , seja  $\{0, 1\} \ni u_{i\bar{i}k\bar{k}} = y_{ik} \cdot y_{i\bar{k}}$ , que será 1 se ambas forem 1 e 0 em qualquer outro caso. Impondo as restrições lineares:

$$\begin{aligned} y_{ik} + y_{i\bar{k}} - u_{i\bar{i}k\bar{k}} &\leq 1, \\ -y_{ik} - y_{i\bar{k}} + 2u_{i\bar{i}k\bar{k}} &\leq 0, \end{aligned} \tag{17}$$

para  $i = 1, \dots, p, \quad \bar{i} = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r, \quad \bar{k} = k+1, \dots, r$  temos a condição descrita no parágrafo anterior satisfeita. Inserindo as desigualdades (16) e (17) no modelo (1)–(15), teremos uma versão linear deste problema, apresentada a seguir.

$$\text{minimize } z_1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r \sum_{\bar{k}=1}^r d_{k\bar{k}} \cdot v_{ijk\bar{k}} \quad (18)$$

$$\text{minimize } z_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{\bar{i}=1}^p \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\bar{k}=k+1}^r d_{k\bar{k}} \cdot u_{i\bar{i}k\bar{k}} \quad (19)$$

$$\text{sujeito a } \text{restrições (3) – (14)} \quad (20)$$

$$\text{restrições de linearizações (16),} \quad (21)$$

$$\text{restrições de linearizações (17),} \quad (22)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, y_{ik} \in \{0, 1\}, z_{jk} \in \{0, 1\}, w_i \in \{0, 1\}, u_{i\bar{i}k\bar{k}} \in \{0, 1\}, v_{ijk\bar{k}} \in \{0, 1\}, \quad (23)$$

$$i = 1, \dots, p, \quad \bar{i} = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r, \quad \bar{k} = k + 1, \dots, r.$$

Na escalarização da formulação (18)–(23) é que aplicaremos o pacote de programação linear inteira para obter um conjunto de soluções eficientes para o mesmo.

### 3 Aplicação do método $\varepsilon$ –Restrito

Empregamos o método  $\varepsilon$ –Restrito ([6]) para gerar um conjunto de soluções eficientes (no senso de Pareto) para o problema (18)–(23). Primeiramente, otimizamos individualmente cada objetivo, isto é, determinamos as soluções ótimas dos problemas  $\min\{z_1 + 0.01z_2 \mid \text{sa (20) – (23)}\}$  e  $\min\{z_2 + 0.01z_1 \mid \text{sa (20) – (23)}\}$ , onde os termos  $0.01z_1$  ou  $0.01z_2$  são para evitar múltiplas soluções. Sejam  $z_2^-$  e  $z_2^+$  os valores de máximo e mínimo da segunda função objetivo, que podem ser determinados com os dois problemas acima. Basta tomar as soluções ótimas dos problemas anteriores e avaliá-las na função  $z_2$ . Feito isto, Consideramos o problema restrito:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } z_1 + 0.01z_2 \\ &\text{sujeito a } \text{restrições (20) – (23),} \\ &z_2 \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (24)$$

onde  $\varepsilon \in \mathcal{I} = [z_2^-, z_2^+]$ . A cada escolha de  $\varepsilon$  em  $\mathcal{I}$ , uma solução eficiente é determinada. Nas simulações apresentadas a seguir, apresentamos os resultados desta implementação, onde fizemos dez atribuições para  $\varepsilon$  uniformemente distribuídas.

### 4 Resultados computacionais

Os subproblemas restritos foram resolvidos pelo CPLEX 12.5 em um computador Intel(R) Core(TM) i3 M350 de 2.27GHz, com 2 GB de memória em um sistema operacional Windows 7 Professional de 32 Bits. Geramos 9 instâncias para este problema, variando-se  $p$ ,  $q$  e  $r$ . Os valores estão apresentados na Tabela (1). Utilizamos mapa geográfico de 15 nós (cidades) gerados aleatoriamente para termos as distâncias  $d_{k\bar{k}}$  entre os nós  $k$  e  $\bar{k}$ , bem como o vetor das capacidades ( $C$ ) e da demanda ( $dem$ ).

Em cada instância, apresentamos os valores de máximo e mínimo das duas funções-objetivo, número de soluções eficientes encontradas ( $\#$  efic.) e o tempo computacional

médio (cpu) que o  $\varepsilon$ -Restrito em cada instância levou para resolver os dez subproblemas restritos (em segundos). A cada subproblema (24) foi limitado um tempo máximo de 10 minutos de execução.

Tabela 1: Características das classes testadas, mínimo e máximo de cada função objetivo, número de soluções eficientes e tempo de cpu utilizado por instância

Instância	$r$	$p$	$q$	$z_1^-$	$z_1^+$	$z_2^-$	$z_2^+$	# efic.	CPU
1	10	2	4	78	151	10	63	7	16,40
2	10	2	6	165	302	10	55	7	102,89
3	10	2	8	275	499	10	85	8	345,98
4	12	4	4	68	115	191	368	8	1789,32
5	12	4	6	128	210	191	543	8	1987,21
6	12	4	8	240	350	191	530	10	2878,71
7	15	5	6	118	200	379	713	10	6000,00
8	15	5	8	178	350	379	986	10	6000,00
9	15	5	10	340	585	379	1235	10	6000,00

Como observamos, o problema fica cada vez mais difícil de ser resolvido à medida que aumentam-se  $p$ ,  $q$  e  $r$ . A partir da Instância 7, o tempo de 10 minutos por subproblema foi atingido e o CPLEX finalizou sua busca por uma solução inteira mais promissora, obtendo soluções localmente eficientes. A linearização da função objetivo eleva demasiadamente a dimensão do problema, ocasionando dificuldades para resolver instâncias maiores. É notório, por outro lado, a amplitude dos objetivos  $z_1$  e  $z_2$ , salientando fortemente a característica multi-objetiva deste problema. Por exemplo, a Instância 9 possui uma amplitude de 245 em  $z_1$  e 856 no objetivo  $z_2$ . Esse fato reflete diretamente no fato de  $\varepsilon$ -Restrito ter determinado 10 soluções eficientes, uma para cada valor de  $\varepsilon \in \mathcal{I} = [379, 1235]$ .

As Figuras 1(a) e 1(b) mostram as soluções ótimas para a Instância 9 minimizando-se  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente. Os nós quadrados, circulares e losangos indicam, respectivamente, os clientes, as facilidades e os nós vagos. Por exemplo, na Figura 1(a), o nó circular demarcado por 5/2 significa que facilidade 2 está no nó 5 e ele atende os clientes 1 e 2, localizados, respectivamente, nos nós 2 e 6. Os fluxos entre as facilidades e clientes são ilustrados por meio das flechas com sentido.

Note que, na Figura 1(a) os clientes encontram-se bem próximos das facilidades que o atendem, em detrimento da solução apresentada na Figura 1(b), que se caracteriza por aproximar apenas as facilidades.

## 5 Conclusões

Este trabalho apresentou um modelo matemático inédito de alocação de centros consumidores e facilidades baseado no clássico modelo das  $p$ -medianas. Este modelo é não-linear e de natureza multi-objetiva, onde os clientes e as facilidades são alocados na rede e deseja-se dimensionar o fluxo da facilidade para os clientes, atendendo à demanda mínima de cada centro consumidor e não extrapolando a capacidade de cada facilidade.

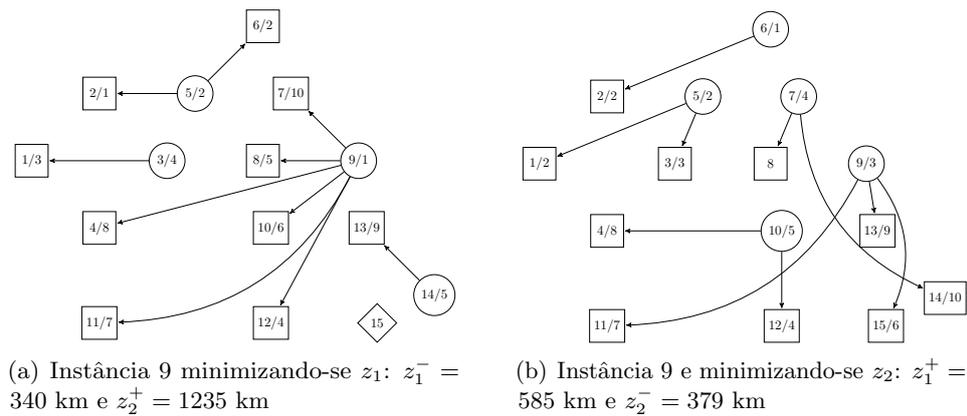


Figura 1: Esquema das soluções ótimas minimizando-se os objetivos individualmente

O trabalho linearizou as funções-objeto envolvidas e então aplicou o método  $\varepsilon$ -Restrito para determinar o conjunto de soluções eficientes para este problema. A aplicabilidade deste modelo matemático bem como o método de resolução adotado, permitem auxiliar tomadores de decisões em problemas que envolvem distribuições em armazéns, distribuidores, filiais, transportadoras, mercados varejistas, etc, permitindo analisar e dimensionar frotas de veículos para o atendimento da demanda de toda clientela.

Como perspectivas futuras, pretendemos aplicar métodos heurísticos para resolver instâncias de dimensão mais elevada deste problema.

## Referências

- [1] M. Albareda-Sambola, Y. Hinojosa, J. Puerto, The reliable  $p$ -median problem with at-facility service, *European Journal of Operational Research*, 245:656-666, 2015. DOI: 10.1016/j.ejor.2015.03.049.
- [2] A. F. Aliano, Novas extensões de técnicas de escalarizações no problema de corte unidimensional inteiro multi-objetivo. Tese de Doutorado, IMECC/UNICAMP, 2016.
- [3] M. Arenales, R. V. Morabito, V. Armentano, and H. Yanasse. *Pesquisa operacional: para cursos de engenharia*. Elsevier Brasil, 2017.
- [4] S. Dantrakul, C. Likasiri, and R. Pongvuthithum, Applied  $p$ -median and  $p$ -center algorithms for facility location problems, *Expert Systems with Applications*, 41:3596-3604, 2014. DOI: 10.1016/j.eswa.2013.11.046.
- [5] J. Kalcsics, S. Nickel, M. A. Pozo, J. Puerto, A. M. Rodríguez-Chía, The multicriteria  $p$ -facility median location problem on networks, *European Journal of Operational Research*, 235:484-493, 2014. DOI: 10.1016/j.ejor.2014.01.003.
- [6] K. Miettinen, Nonlinear Multiobjective Optimization, In *International Series in Operations Research and Management Science*, volume 12, 1999.