Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Convolução e Regularização de Funções de L^p

Marcos Antonio Viana Costa[1]
Marcos Tadeu De Oliveira Pimenta[2]
Departamento da Matemática e Computação, FCT-UNESP, 19060-900, Pres. Prudente, SP

No estudo das funções de L^p, são essenciais as propriedades que uma classe de funções denominadas regularizantes possui. Essas funções tem a propriedade de, quando convoluídas com uma função de L^p, dar origem a uma função de L^p que é de classe C^∞. Tal regularização tem inúmeras aplicações tanto na teoria da Análise Funcional, haja visto que muitas das propriedades das funções C^∞ são transferidas por tal processo para funções menos regulares, quando em processamento de sinais digitais.

Espaço L^p

O espaço L^p é um conjunto de funções que possuem boas propriedades de mensurabilidade, cujas integrais em um certa potência p convergem. Esse espaço tem estrutura de espaço vetorial normado e será definido a seguir.

Definição 1. *Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Defina-se o **espaço** $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ por:*

$$L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } ||f||_p < \infty\}, \tag{1}$$

onde $||f||_p = \left(\int |f|_p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$.

Para facilitar a nomenclatora, $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ será representado por $L^p(\mu)$, $L^p(\Omega)$ ou simplesmente por L^p.

Convolução

Considere inicialmente duas funções f e g. Será visto aqui o conceito que permite por meio dessas funções dar origem a uma terceira que mantem boas propriedades das originais.

Definição 2. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Defina-se a **convolução** de f e g por:*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Tal integral é definida se $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Note que, devido à *Desigualdade de Hölder* a integral acima está bem definida para quase todo x.

[1]marcosviana1997@gmail.com
[2]pimenta@fct.unesp.br

Funções Regularizantes

Definição 3. *Uma sequência de* ***funções regularizantes*** $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ *é uma sequência de funções* $\rho_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *que satisfazem:*

(i) $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $\text{supp}(\rho_n) \subset \overline{B(0,1/n)}$.

(iii) $\int \rho_n = 1$.

(iv) $\rho_n \geqslant 0$ *em* $\mathbb{R}^N$.

Será utilizada a notação (ρ_n) para denotar uma sequência de funções regularizantes.

Os resultados a seguir mostram que o processo de convolução de funções de L^p com funções regularizantes dá origem a funções C^∞, às quais, na norma de L^p, estão próximas da função original. Por meios dos resultados abaixo é possível garantir tal resultado.

Proposição 1. *Seja* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$*. Então* $(\rho_n \star f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ *uniformemente em compactos do* $\mathbb{R}^N$.

Proposição 2. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$*, com* $1 \leqslant p < \infty$*. Então* $(\rho_n \star f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Dado $\varepsilon > 0$, considere $f_1 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ de modo que $||f - f_1||_p < \varepsilon$, sendo $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leqslant p < \infty$. Pela Proposição 1 sabe-se que $(\rho_n \star f_1) \to f_1$ uniformemente em todo conjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Por outro lado, sabendo que $\text{supp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$, para $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, segue que:

$$\text{supp}(\rho_n \star f_1) \subset \overline{B(0,1/n)} + \text{supp}(f_1) \subset \overline{B(0,1)} + \text{supp}(f_1), \tag{3}$$

o qual é um conjunto compacto. Segue que:

$$||(\rho_n \star f_1) - f_1|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4}$$

Tomando $(\rho_n \star f_1) - f = [\rho_n \star (f - f_1)] + [(\rho_n \star f_1) - f_1] + [f_1 - f]$ então $||(\rho_n \star f_1) - f||_p \leqslant 2||f - f_1||_p + ||(\rho_n \star f_1) - f_1||_p$. Portanto, como:

$$\limsup_{n\to\infty} ||(\rho_n \star f) - f||_p \leqslant 2\varepsilon, \tag{5}$$

para todo $\varepsilon > 0$, segue que, $\lim_{n\to\infty} ||(\rho_n \star f) - f||_p = 0$. O que conclui a demonstração. ■

Referências

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.

[2] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons, 2 edition, New York, 1999.