

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Uma formulação autorregularizada para resolver problemas de Helmholtz usando o método dos elementos de contorno com integração direta

Carlos Friedrich Loeffler<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

Ramon Galimberti<sup>2</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

Hercules de Melo Barcelos<sup>3</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia, INMETRO, Duque de Caxias, RJ

**Resumo.** Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma nova formulação integral associada à Equação de Helmholtz, para isto, aplica-se a técnica de integração direta com funções de base radial do Método dos Elementos de Contorno. Este novo desenvolvimento evita a singularidade produzida na solução fundamental pela coincidência entre os pontos fonte, os pontos campo e os pontos base através de uma estratégia baseada na escolha de duas funções auxiliares na formulação integral, onde têm-se a solução fundamental de Poisson e a função dada pelo Tensor de Galerkin. A formulação proposta apresentou melhores resultados do que a formulação anterior na simulação de problemas bidimensionais de varredura de frequências, recuperando os pontos de ressonância com maior precisão e apresentando erros menores na amplitude das respostas para diferentes valores de frequências de excitação.

**Palavras-chave.** Problema de Helmholtz, Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta, Esquema de Regularização, Funções de Base Radial.

## 1 Introdução

Os casos regidos pela Equação de Helmholtz [5] têm grande destaque no contexto da teoria do campo escalar, pois se relacionam à análise da resposta acústica no domínio da frequência.

Existem algumas formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) voltadas para solução deste problema. A primeira delas usa uma solução fundamental dependente da frequência de excitação [2]; mas, apesar da sua elegância, apresenta dificuldades relacionadas ao custo computacional e ao fato de lidar com aritmética complexa. Uma

---

<sup>1</sup>carlosloeffler@bol.com.br

<sup>2</sup>ramongalimberti2@gmail.com

<sup>3</sup>engercules@gmail.com

segunda formulação neste contexto é a técnica de Dupla Reciprocidade (MECDR) [8] que usa funções radiais para solução da integral de domínio relacionada à inércia. Contudo, a MECDR apresenta imprecisões numéricas, principalmente devido à sensibilidade no condicionamento matricial.

Mais recentemente foi desenvolvida uma nova técnica (MECID), que também usa funções de base radial, mas aproxima diretamente todo o núcleo da integral de domínio, de forma semelhante ao que se faz numa interpolação [6,7]. Para evitar uma singularidade quando o núcleo de integral relacionado à inércia do sistema é aproximado pelo procedimento usual de discretização do MEC, um esquema de regularização inspirado na ideia de Hadamard [1] foi aplicado com sucesso. Experiências computacionais mostraram que uma gama maior de diferentes funções radiais pode ser usada sem problemas de instabilidade numérica.

Como resultado do aprimoramento da MECID, apresenta-se aqui uma formulação alternativa em que o termo integral relacionado à inércia está autorregularizado. Para ilustrar seu desempenho, resolve-se um problema no qual as amplitudes locais do potencial e as condições de ressonância são examinadas, usando-se o procedimento de varredura de frequências. Faz-se a devida aferição de desempenho comparando-se a solução numérica da MECID com a respectiva solução analítica.

## 2 Formulação Integral da equação de Helmholtz

Usando notação indicial, a Equação de Helmholtz pode ser expressa pela equação (1).

$$u_{,ii}(X) = -\lambda u(X). \quad (1)$$

Na equação (1)  $\lambda$  é um escalar, que fisicamente corresponde ao quadrado da frequência de excitação  $\omega$  dividido pelo coeficiente de rigidez  $K$  (Bulk Modulus). Considerando-se um domínio bidimensional homogêneo e isotrópico  $\Omega(X)$ , limitado pelo contorno  $\Gamma(X)$ , onde  $X = X_{(x,y)}$ , as condições de Dirichlet  $u(X)$  são prescritas em  $\Gamma_u(X)$  e as de Neumann  $q(X)$  em um contorno complementar  $\Gamma_q(X)$ .

Na formulação aqui proposta, estabelece-se como função auxiliar junto a forma integral da equação de governo a seguinte função  $b^*(\xi; X)$  conforme equação (2).

$$b^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) - \lambda G^*(\xi; X). \quad (2)$$

A função auxiliar  $b^*(\xi; X)$  é composta por duas funções: a solução fundamental relacionada ao problema de Poisson somada a função  $G^*(\xi; X)$ , que é o Tensor de Galerkin associado a  $u^*(\xi; X)$ , ou seja, sua primitiva [3]. Tais funções são dadas pela equação (3).

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)]; \quad G^*(\xi; X) = \frac{1}{8\pi} [r^2(\xi; X) - \ln(r(\xi; X))]. \quad (3)$$

Então, a equação integral (2) pode ser reescrita conforme a equação (4).

$$\int_{\Omega} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega(X) - \lambda \int_{\Omega} u_{,ii}(X) G^*(\xi; X) d\Omega(X) =$$

$$-\lambda \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega(X) + \lambda \int_{\Omega} u(X)\lambda G^*(\xi; X)d\Omega(X). \quad (4)$$

Para deduzir a forma integral do contorno inversa são realizadas integrais por partes e o Teorema da Divergência é devidamente aplicado [3]. Esses procedimentos são implementados tanto no lado direito quanto no lado esquerdo da equação (4), resultando na equação (5).

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma(X) + \\ \lambda \left( - \int_{\Gamma} q(X)G^*(\xi; X)d\Gamma(X) + \int_{\Gamma} u(X)S^*(\xi; X)d\Gamma(X) \right) = \\ \lambda^2 \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega(X). \end{aligned} \quad (5)$$

Duas novas funções foram introduzidas neste equacionamento pela equação (6).

$$\begin{aligned} u_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = q^*(\xi; X) = \left[ \frac{-1}{2\pi r(\xi; X)} \right] r_i(\xi; X)n_i(X); \\ G_{,i}^*(\xi; X)n_i(X) = S^*(\xi; X) = \left[ -\frac{2\ln(r(\xi; X)) - 1}{8\pi} \right] r_i(\xi; X)n_i(X). \end{aligned} \quad (6)$$

### 3 Aproximação por funções de base radial

O núcleo da integral de domínio do lado direito da equação (5) é resolvido por aproximação, usando funções de base radial  $F^j(X; X^j)$ , onde o argumento destas funções é composto pela distância euclidiana entre os pontos de base  $X^j$  e os pontos de domínio  $X$  [4]. O núcleo não é singular quando os pontos fonte são coincidentes com os pontos de campo e, conseqüentemente, não é necessário um procedimento de regularização.

Da mesma forma que o MECDR, o método proposto transforma a integral de domínio em uma única integral de contorno usando uma função de interpolação primitiva  $\psi^j(X; X^j)$ , cuja relação com a função radial  $F^j(X; X^j)$  é apresentada pela equação (7).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(X)G^*(\xi; X)d\Omega(X) = \xi \alpha^j \int_{\Omega} F^j(X; X^j)d\Omega(X) = \xi \alpha^j \int_{\Omega} \psi_{,ii}^j(X; X^j)d\Omega(X) = \\ \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \psi_{,i}^j(X; X^j)n_i d\Gamma(X) = \xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X; X^j)d\Gamma(X). \end{aligned} \quad (7)$$

Para cada ponto fonte  $\xi$  dado pela equação (7) é feita uma varredura de todos os pontos base  $X^j$  em relação aos pontos do domínio  $X$ , ponderados pelos coeficientes  $\xi \alpha^j$ . Deve notar-se que o número de pontos base  $X^j$  deve ser igual aos valores nodais discretos.

## 4 Procedimento de discretização

Usando o procedimento de discretização padronizado do MEC, a forma da matriz relacionada à equação (5) é muito simples, resultando na equação (8).

$$\begin{bmatrix} H_{cc..} & 0_{ci} \\ \dots & \dots \\ H_{ic..} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc..} & 0_{ci} \\ \dots & \dots \\ G_{ic..} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc..} & 0_{ci} \\ \dots & \dots \\ W_{ic..} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc..} & 0_{ci} \\ \dots & \dots \\ S_{ic..} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^m \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Os coeficientes das matrizes  $H$  e  $G$  dizem respeito à integração de  $u^*$  e  $q^*$  na fronteira; da mesma forma, os coeficientes de  $W$  e  $S$  dizem respeito à integração de  $G^*$  e  $S^*$  na fronteira; o vetor  $N^j$  representa a integração do limite da função radial auxiliar  $\eta^j$ . Foram introduzidos pontos internos de interpolação para melhorar a aproximação da MECID.

Para os problemas de Helmholtz, o MECID deve considerar os valores nodais do potencial  $u(X)$  explicitamente, mas na equação (8) os valores nodais potenciais estão implícitos no vetor  $A^\xi$ . O potencial  $u(X)$  deve ser explícito para permitir a construção da matriz de inércia. Para este fim, o vetor  $A^\xi$  deve ser reescrito de acordo com a equação (9).

$$A_\xi = [N_1 \quad \dots \quad N_m] \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 \\ \vdots \\ \xi\alpha_m \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Os coeficientes  $\xi\alpha^i$  podem-se ser calculados pelo seguinte esquema matricial representado pela equação (10).

$$[\xi\alpha] = [F]^{-1}[\xi\Lambda][F]\alpha = [F]^{-1}[\xi\Lambda][u]. \quad (10)$$

Deve-se ressaltar que usando o MECID regularizado a solução fundamental compõe o núcleo a ser interpolado. Na presente formulação, a matriz diagonal  $\xi\Lambda$  dada na equação (10) é composta pelo Tensor Galerkin. Após a implementação dos devidos algebrismos matriciais, o sistema de equações final, em que uma matriz de inércia aparece explicitamente, pode ser escrito pela equação (11).

$$\begin{bmatrix} H_{cc..} & 0_{ci} \\ \dots & \dots \\ H_{ic..} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc..} & 0_{ci} \\ \dots & \dots \\ G_{ic..} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} W_{cc..} & 0_{ci} \\ \dots & \dots \\ W_{ic..} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} S_{cc..} & 0_{ci} \\ \dots & \dots \\ S_{ic..} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} M_{cc..} & M_{ci} \\ \dots & \dots \\ M_{ic..} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}. \quad (11)$$

## 5 Exemplo de aplicação

Resolve-se uma membrana quadrada sujeita unicamente a condições de Dirichlet, na qual em uma das arestas há um carregamento espacialmente senoidal, conforme mostra a figura (1). Para cada frequência, o erro relativo médio é avaliado considerando em módulo a diferença entre valores numéricos e analíticos, dividida pelo valor analítico do potencial em cada ponto interno.

A solução analítica foi obtida pelo Método de Separação de Variáveis e é dada pela equação (12), considerando valores unitários para  $K$  e  $P$ .

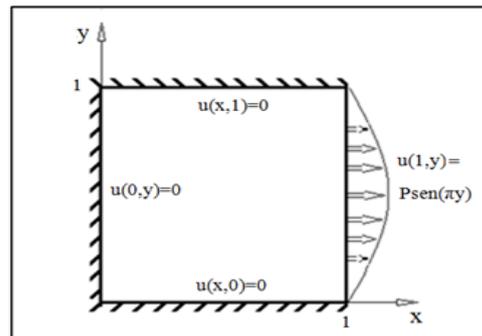


Figura 1: Conformação geométrica e condições de contorno do exemplo de aplicação.

$$u(x, y) = \frac{\sin(x\sqrt{\omega^2 - \pi^2})\sin(\pi y)}{\sin(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})}. \quad (12)$$

A varredura de frequências inicia-se a partir de  $\pi$ , evitando valores negativos nos radicais da equação (12). Por razões de simplicidade, geralmente as características das malhas MEC estão indicadas nas figuras pela seguinte convenção: número de elementos de contorno/número de pontos de base internos.

Inicialmente comparou-se o efeito da discretização do contorno e da inserção de pontos base dentro do domínio no procedimento MECID não regularizado. Ambos os recursos são importantes para alcançar bons resultados e uma proporção adequada entre eles leva a uma simulação eficiente. Pode-se verificar pela figura (2) que o desempenho é melhorado tanto com o refinamento de malha quanto com a inserção de pontos internos interpolantes. Estes últimos têm grande importância na melhoria dos resultados dentro de uma faixa de frequências, mas somente com o refinamento da malha de contorno é possível calcular frequências mais altas com maior exatidão. Nota-se que para a malha mais fina com 324 elementos de contorno e 576 pontos de base internos, o erro relativo para a vigésima frequência é de aproximadamente 1%.

As oscilações nas curvas de erro se devem pela proximidade entre a frequência de excitação e uma frequência natural. Contudo, picos artificiais de ressonância são criados devido à imprecisão numérica na representação de propriedades constitutivas, particularmente a inércia do sistema.

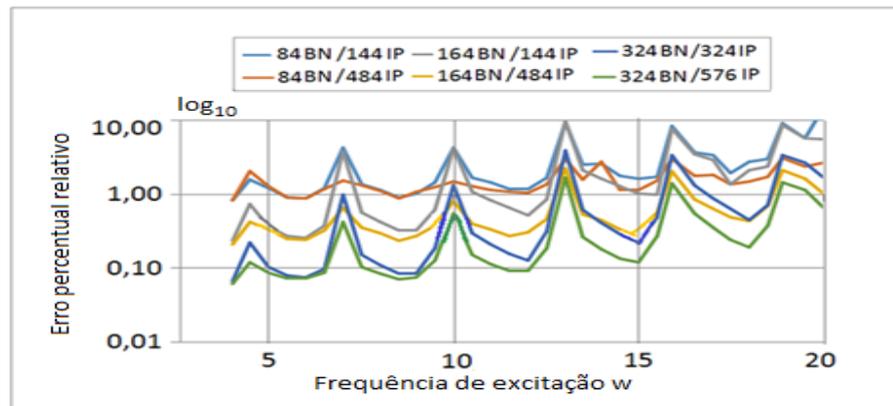


Figura 2: Curva de erro relativo para o MECID considerando diferentes malhas.

No segundo teste, mostrado na figura (3), compara-se o desempenho do MECID autorregularizado com o modelo clássico regularizado, considerando a malha mais rica, com 324 pontos nodais no contorno e 576 pontos de base internos. Há uma grande diferença no desempenho de ambas, com a formulação proposta apresentando resultados superiores.

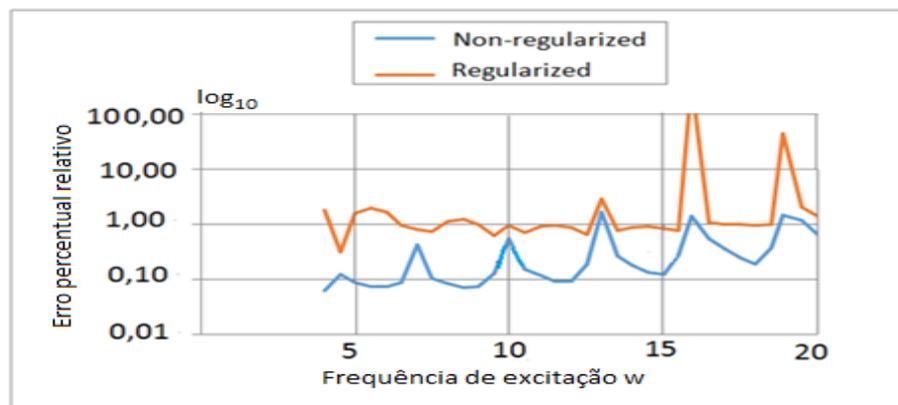


Figura 3: Comparação do erro relativo entre as formulações autorregularizada e com regularização.

## 6 Conclusões

Este artigo apresentou uma nova formulação mais simples do que a formulação MECID regularizada, uma vez que elimina o procedimento de regularização cuja operacionalização gera um sistema matricial relativamente mais elaborado.

Os resultados obtidos também mostram que o modelo autorregularizado foi bem sucedido em termos de precisão, no intervalo de frequências de excitação analisadas. Além de ser eficiente e elegante em evitar a singularidade no núcleo do domínio integral, o procedimento de regularização foi mais robusto numericamente do que o modelo precedente.

O modelo autorregularizado gera um sistema matricial final de forma diferente em relação às outras formulações dinâmicas comuns, já que agora duas matrizes estão relacionadas aos efeitos inerciais. Assim, sua aplicação para outros problemas correlacionados, como o problema de autovalor e o problema de resposta no domínio do tempo, exigirão necessariamente alguma adaptação ao modelo matemático apresentado.

## Referências

- [1] C. L. R. Braga. *Notas de física-matemática: equações diferenciais, funções de Green e distribuições*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [2] C. A. Brebbia, and S. Walker. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Newnes-Butterworths, London, 1980.
- [3] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [4] M. D. Buhmann. *Radial Basis Function: Theory and Implementations*. Cambridge Press, New York, 2003.
- [5] E. Butkov. *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Pub, Massachusetts, USA, 1973.
- [6] C. F. Loeffler, A. L. Cruz, W. J. Mansur, and A. Bulcão, Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 50:97-108, 2015.
- [7] C. F. Loeffler, H. M. Barcelos, W.J. Mansur, and A. Bulcão. , Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 61:218-225, 2015.
- [8] P. W. Partridge, C.A. Brebbia, and L.C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, 1992.