

# Modelagem da taxa de interação em modelos de biomatemática via $t$ -normas

**Francielle Santo Pedro,**      **Laécio Carvalho de Barros,**

Depto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, UNICAMP,

13083-859, Campinas, SP

E-mail: fran.stopedro@gmail.com, laeciocb@ime.unicamp.br

**Resumo:** *Este trabalho trata das diversas possibilidades de modelar a taxa de interação em modelos de biomatemática. Daremos ênfase nos modelos do tipo presa-predador em que as taxas de predação são modeladas com  $t$ -normas. Essas são operações que generalizam o produto, que usualmente é a operação utilizada para representar taxas de interação em modelos populacionais com duas ou mais espécies. Assim, apesar da modelagem do sistema ser feita através de lógica fuzzy, as soluções são determinísticas.*

**Palavras-chave:** *taxa de interação,  $t$ -normas, presa-predador.*

## 1 Introdução

Geralmente a interação entre espécies é dada pela “lei” de ação de massas derivada da físico-química, que afirma que a taxa de colisões moleculares de duas substâncias químicas é proporcional ao produto das suas concentrações ([3]). Com a finalidade de ampliar a forma de representar as interações entre duas populações, nosso intuito é utilizar uma classe de operadores, chamados  $t$ -normas no lugar da operação produto, lembrando que esta é uma particular  $t$ -norma.

Existem diversos modelos que descrevem a dinâmica populacional entre espécies, por exemplo o modelo do tipo presa-predador, competição e mutualismo entre espécies ([3]). Aqui daremos ênfase em modelos do tipo presa-predador de Lotka-Volterra.

## 2 Modelo Presa-Predador

O modelo clássico presa-predador de Lotka-Volterra utiliza a hipótese de que a taxa de predação está relacionada com a probabilidade de um predador encontrar uma presa. O modelo é dado por ([3, 7]);

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}, \quad (1)$$

sendo  $x, y$  o número (ou densidade) de presas e predadores, respectivamente;  $a > 0$  a taxa de crescimento de presas,  $c > 0$  a taxa de mortalidade de predadores,  $b > 0$  a proporção de sucesso dos ataques dos predadores e  $d > 0$  a taxa de conversão de biomassa das presas em predadores. Os pontos de equilíbrio do modelo são os pontos:  $P = (0, 0)$  que é um ponto de sela instável e  $Q = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  que é um centro neutro [2, 3, 7]. O plano de fase e a solução de (1) podem ser vistos nas Figuras 1 e 2.

Modelos de interação tipo presa-predador devem satisfazer algumas hipóteses ([3]):

- h1. Para sobreviver, os predadores dependem da presença de presas;

- h2. A taxa de predação depende da probabilidade em que uma presa interage com um predador;
- h3. A taxa de crescimento da população de predadores é proporcional a ingestão de alimentos (taxa de predação).

Em outras palavras, a interação entre a presa e o predador é favorável para o predador e prejudicial para a presa.

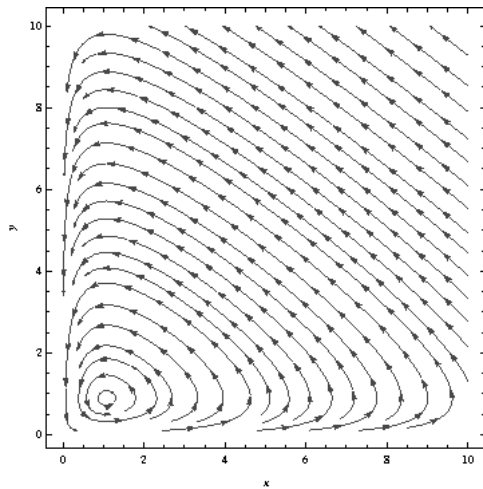


Figura 1: Plano de fase do modelo (1) sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

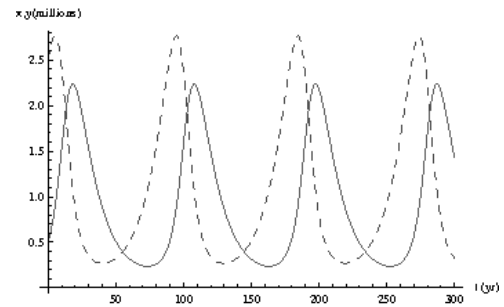


Figura 2: Solução  $x, y$  (milhões) por tempo  $t$  (anos), sendo que a curva tracejada corresponde às presas enquanto a curva contínua representa os predadores.

Vemos em [5] a seguinte observação: se o habitat onde as presas e predadores convivem é pequeno, a predação acontece rapidamente desde que haja presas suficiente, isto é, se o número de presas é maior do que o de predadores, a taxa de predação será predominantemente determinada pelo número de predadores e, em situação contrária, se houver mais predadores do que presas essa taxa será proporcional ao número de presas. A partir dessa observação, concluímos que em ambos os casos, a taxa de predação é proporcional ao mínimo entre presas e predadores.

Dessa forma, surgiu nossa inspiração para o uso de  $t$ -normas diferentes da  $t$ -norma do produto e trataremos isso adiante.

### 2.1 Presa-predador de Lotka-Volterra com a $t$ -norma do mínimo

O conceito de  $t$ -norma é importante para interpretação de conjunções e também para operações entre conjuntos fuzzy [1, 4, 6, 8, 11]. Uma  $t$ -norma  $T$  é uma operação binária  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz quatro propriedades:

- elemento neutro:  $1Tx = x$ ;
- comutativa:  $xTy = yTx$ ;
- associativa:  $xT(yTz) = (xTy)Tz$ ;
- monotonicidade: se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $xTy \leq uTv$ .

Alguns exemplos de  $t$ -norma são:  $T_1(x, y) = xy$ ,  $T_2(x, y) = \min \{x, y\}$  e  $T_3(x, y) = \frac{xy}{x+y-xy}$ .

Levando em conta as observações de [5], adotaremos inicialmente a  $t$ -norma do mínimo ( $T_2(x, y)$ ) na interação entre as espécies. Dessa forma, (1) passa a ser

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - b(x \wedge y) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + d(x \wedge y) \end{cases} \quad (2)$$

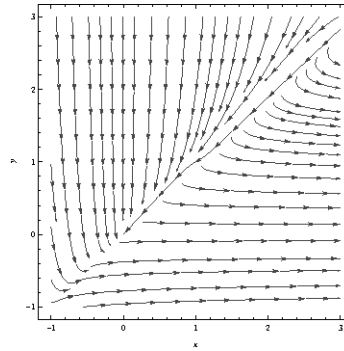


Figura 3: Plano de fase do modelo 2, sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

O modelo (2) satisfaz as hipóteses  $h1$ ,  $h2$  e  $h3$ , pois os predadores precisam das presas para sobreviver e a taxa de predação depende da interação entre eles (que nesse caso é dado pelo mínimo). O único ponto de equilíbrio desse sistema é dado por  $(x, y) = (0, 0)$ .

Na Figura 3, o ponto  $(0, 0)$  é ponto de sela para o modelo (2) da mesma forma que o é para o modelo (1). Chamamos atenção para o fato de que o modelo (2) é baseado na  $t$ -norma do mínimo, pois as populações de presas e predadores não variam apenas no intervalo  $[0, 1]$  onde está definida a  $t$ -norma [9].

A seguir, com o propósito de aprimorar nossa modelagem utilizaremos a  $t$ -norma de Hamacher.

## 2.2 Presa-predador de Lotka-Volterra com a $t$ -norma de Hamacher

A  $t$ -norma de Hamacher é dada por

$$T_3(x, y) = \frac{xy}{p + (1-p)(x + y - xy)}, \tag{3}$$

[4, 6], para  $p \neq 0$  temos  $x, y \in [0, 1]$  (se  $p = 0$ ,  $x, y \neq 0$ ).

Substituindo o produto entre as populações  $x$  e  $y$  por (3) em (1), obtemos o seguinte modelo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \frac{bxy}{p+(1-p)(x+y-xy)} \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \frac{dxy}{p+(1-p)(x+y-xy)} \end{cases}, \tag{4}$$

sendo  $a, b, c$  e  $d$  como em (1).

Como o modelo anterior, o modelo (1), é baseado na  $t$ -norma de Hamacher. O modelo (4) satisfaz todas as hipóteses ( $h1 - h3$ ) de um sistema presa-predador.

As soluções do modelo (4) para diversos valores de  $p$  estão nas Figuras 4 e 5.

Analisando  $\frac{dx}{dt} = 0$  e  $\frac{dy}{dt} = 0$ , obtemos, para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , as isóclinas

$$y_1 = \frac{a(p(x-1) - x)}{-b + a(1 + p(x-1) - x)}$$

e

$$y_2 = \frac{c(p(x-1) - x) + dx}{c(p-1)(x-1)}.$$

Não é possível encontrar uma expressão geral para os pontos de equilíbrio. Assim, para os parâmetros  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ , obtemos os seguintes pontos de equilíbrios

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{-0.54 + 1.1p}{p-1} \pm 0.004 \sqrt{\frac{14641 + 706p + 529p^2}{(p-1)^2}}$$

e

$$(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = (0, 0).$$

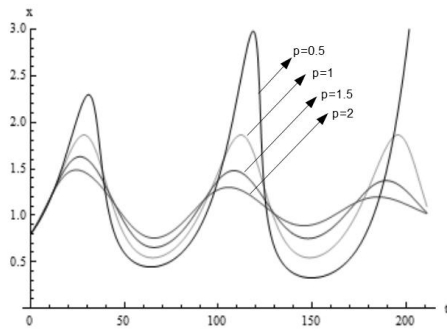


Figura 4: Solução  $x$  por tempo  $t$ , sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

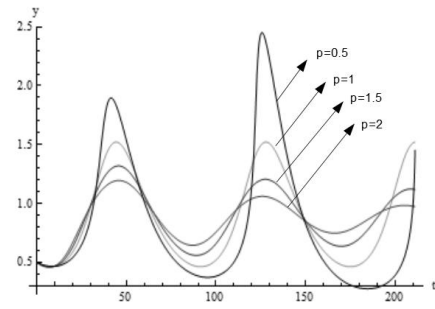


Figura 5: Solução  $y$  por tempo  $t$ , sendo  $a = 0.08$ ,  $b = 0.09$ ,  $c = 0.075$  e  $d = 0.07$ .

Notamos para  $p = 0.5$ , conforme o tempo aumenta os picos das soluções também aumentam em relação às demais, isso tanto para as presas quanto para os predadores, seguido pelos picos das soluções com  $p = 1$ , ( $t$ -norma do produto),  $p = 1.5$  e  $p = 2$ . Entre um pico e outro, a ordem das curvas invertem, ou seja, quanto mais as presas crescem, maior será a sua oferta para os predadores [9].

Nas Figuras 6 a 10 temos o plano de fase para diversos valores de  $p$ .

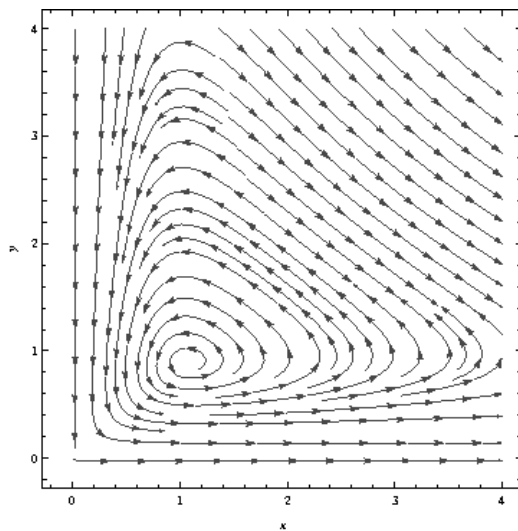


Figura 6: Plano de fase da solução com  $p = 0$ .

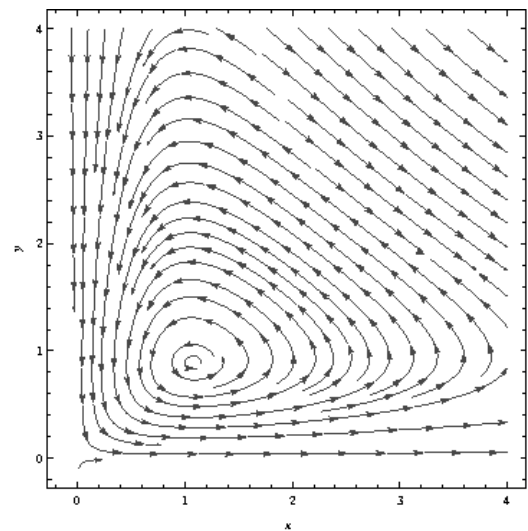


Figura 7: Plano de fase da solução com  $p = 0.5$ .

Através da análise dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema (4) com os parâmetros correspondentes aos das figuras 6 a 10, obtemos:

- Para  $p = 0$ , o ponto de equilíbrio  $P = (1.08, 0.896)$  é centro neutro.
- Para  $p = 0.5$ , os pontos de equilíbrio  $P = (0, 0)$  é ponto de sela e  $Q = (1.075, 0.892)$  é centro neutro.
- Para  $p = 1$  (Figura 8), o modelo (4) é o próprio modelo de Lotka-Volterra e ele é analisado na primeira secção deste capítulo.
- Para  $p = 1.5$ , os pontos de equilíbrio  $P = (1.067, 0.885)$  é foco estável,  $P = (0, 0)$  e  $Q = (3.38, 2.81)$  são pontos de sela.

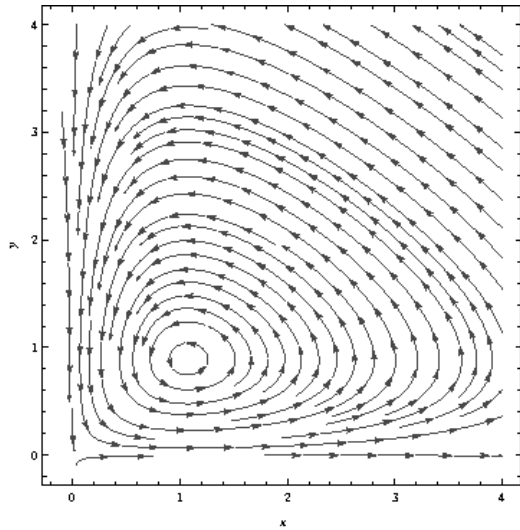


Figura 8: Plano de fase da solução com  $p = 1$ .

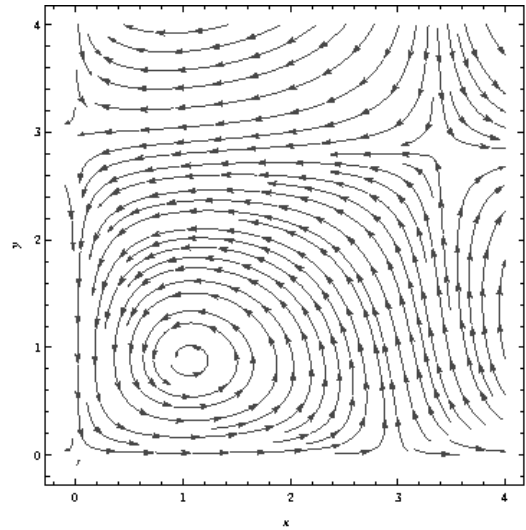


Figura 9: Plano de fase da solução com  $p = 1.5$ .

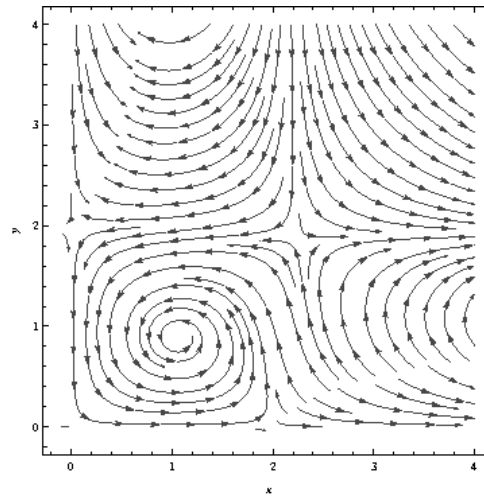


Figura 10: Plano de fase da solução com  $p = 2$ .

- Para  $p = 2$ , os pontos de equilíbrio  $P = (1.063, 0.882)$  é foco estável,  $Q = (2.266, 1.88)$  e  $R = (0, 0)$  são pontos de sela.

Dessa forma, notamos que para  $p < 1$  temos pontos de equilíbrios repulsores, para  $p = 1$  temos órbitas fechadas em torno do ponto de equilíbrio e para  $p > 1$  temos pontos de equilíbrio atratores e pontos de sela.

Podemos interpretar o parâmetro  $p$  como a dificuldade da interação entre as espécies envolvidas, pois como vemos nas Figuras 4 e 5 quando  $p = 1$  a interação dada é probabilística (próprio Lotka-Volterra)(Figura 8). Para valores de  $p > 1$  (Figuras 9 e 10), a dificuldade de interação aumenta, isto é, a interação depende de fatores mais específicos, como por exemplo, o habitat, a habilidade de caça ou até mesmo a falta desta, mudanças de hábito entre outras. Já quando o parâmetro  $0 \leq p < 1$  (Figuras 6 e 7), a interação ocorre facilmente, ocasionando um favorecimento de ambas as espécies com o passar do tempo [11].

Podemos concluir que o modelo (4) é determinado pela escolha do parâmetro  $p$ , já que este determina a estabilidade do sistema.

### 3 Conclusões

Neste trabalho, abordamos a interação entre espécies, feita geralmente pela operação produto, através de operações chamadas  $t$ -normas. Nossa inspiração surge no fato que a taxa de predação é proporcional ao mínimo entre as populações. Aqui demos ênfase aos modelos presa-predador, porém poderíamos aplicar as  $t$ -normas para modelar outros tipo de interação como por exemplo interações de cooperação.

O interessante no caso abordado foi o fato que obtermos, por exemplo com a  $t$ -norma de Hamacher, uma ferramenta a mais (parâmetro  $p$ ) nesse tipo de modelo.

### Referências

- [1] Barros, L. C., Bassanezi, R. C., “Tópicos em lógica fuzzy e biomatemática”, UNICAMP/IMECC, Campinas 2010.
- [2] Bassanezi, R. C., Ferreira Jr, W. C., “Equações Diferenciais com Aplicações”, HARBRA, São Paulo 1988.
- [3] L. Edelstein-Keshet, “Mathematical models in biology”, Classics in applied mathematics. SIAM, Philadelphia 2005.
- [4] W.Pedrycz and F. Gomide, “Fuzzy systems engineering: toward human-centric computing”, Wiley-IEEE Press, 2007.
- [5] V. Kreinovich, O. Fuentes, “High-Concentration Chemical Computing Techniques for Solving Hard-To-Solve Problems, and Their Relation to Numerical Optimization, Neural Computing, Reasoning Under Uncertainty, and Freedom Of Choice”, Evgeny Katz (ed.), Molecular and Supramolecular Information Processing: From Molecular Switches to Logical Systems, Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2012, pp. 209-235.
- [6] E. P. Klement, R. Messiar and E. Pap, “Triangular norms”, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2000.
- [7] J. D. Murray, “Mathematical Biology I. An Introduction”, volume 1. Springer, New York, 2002.
- [8] E. Massad, N. R. S. Ortega, L. C. Barros, and C. J. Struchiner, “Fuzzy logic action: Applications in epidemiology and beyond”, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [9] F. Santo Pedro and L. C. Barros, “Uso de  $t$ -normas em modelos matemáticos de presa-predador”, Biomatemática, 23(2013) 129-138.
- [10] F. Santo Pedro and L. C. Barros, “The use of  $t$ -norms in mathematical models of epidemics.”, Fuzzy Systems (FUZZ), 2013 IEEE International Conference on,(2013).
- [11] F. Santo Pedro, “Modelos matemáticos para dinâmica de doenças de transmissão direta e presa-predador considerando parâmetros interativos e  $t$ -normas”, Dissertação de mestrado, IMECC-Unicamp, (2013).