

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Problema de Valor de Contorno Fuzzy: Solução Baseada em Derivadas Fuzzy e Método de Diferenças Finitas

Daniel Sánchez Ibáñez¹

Campus Patagonia, Universidad Austral de Chile, Coyhaique, Aysén, Chile /

Depto. de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil
Laécio Carvalho de Barros²

Depto. de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil
João Frederico da Costa Azevedo Meyer³

Depto. de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil
Estevão Esmi Laureano⁴

Depto. de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil

Resumo. Nesse trabalho é estudado um problema de valor de contorno fuzzy (FPVC) que envolve uma equação diferencial fuzzy com termo fonte considerado como uma função fuzzy e condições de contorno modeladas por números fuzzy. É apresentada uma estrutura matricial para obter uma solução numérica a partir do método de diferenças finitas combinado ao uso de derivadas fuzzy. A solução fuzzy é obtida a partir de seus α -níveis, que são intervalos da reta real. É apresentado um exemplo de resolução para um FPVC que modela a equação de Bessel de ordem $1/2$, a partir de esquemas de diferenças finitas centradas, comparando o uso da derivada de Hukuhara (H -diferenciabilidade) e da derivada generalizada de Hukuhara (gH -diferenciabilidade).

Palavras-chave. Problema de valor de contorno, Números fuzzy, Função fuzzy, Método de diferenças finitas, Equação de Bessel, Derivada de Hukuhara, Derivada generalizada de Hukuhara.

1 Introdução

Muitos problemas em engenharia são modelados matematicamente através de um Problema de Valor de Contorno (PVC). De forma geral, um PVC pode ser resolvido em forma aproximada por métodos numéricos como o Método de Diferenças Finitas (MDF) [1]. É claro que tais modelos podem não ser fiéis ao fenômeno representado, uma vez que consideram valores numéricos exatos nos parâmetros, funções modeladoras e/ou condições de contorno do problema, mesmo que haja aí incertezas. Soluções numéricas de um PVC com condições de contorno consideradas como números fuzzy são apresentadas em [2].

¹daniel@ime.unicamp.br

²laeciocb@ime.unicamp.br

³joni@ime.unicamp.br

⁴eelaureano@ime.unicamp.br

Nessa proposta, objetivou-se sugerir uma solução aproximada de um PVC cuja equação diferencial contem uma função fuzzy e as condições de contorno são modeladas por números fuzzy. Assim, será investigada a aplicação do MDF para obter a solução do FPVC que modela uma equação diferencial ordinária, linear, unidimensional e de coeficientes variáveis, em $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, da forma

$$\begin{cases} r(x)y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = F(x), \\ y(a) = A, y(b) = B, \end{cases} \quad (1)$$

onde as condições de contorno $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ (são números fuzzy), $r(x)$, $p(x)$ e $q(x)$ são funções reais e $F : [a, b] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é uma função fuzzy [3].

2 Preliminares

Um subconjunto fuzzy A de um universo U é caracterizado por uma função de pertinência $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$ em que $\varphi_A(x)$ indica o grau com que $x \in U$ pertence a A [4]. Denotamos a família de subconjuntos fuzzy de U pelo símbolo $\mathcal{F}(U)$.

Definição 2.1. [4] *Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de A é o subconjunto clássico de U definido por $[A]_{\alpha} = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\}$ para $0 < \alpha \leq 1$.*

Quando U é um espaço topológico, o 0-nível é definido como o fecho do suporte de A , isto é, $[A]_0 = \overline{\text{supp}A}$, em que $\text{supp}A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$. Para $\alpha = 1$ denotamos $\text{core}A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) = 1\}$.

Definição 2.2. [4] *Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy se cada α -nível de A é um intervalo fechado, limitado e não vazio de \mathbb{R} .*

A partir da definição 2.2, os α -níveis do número fuzzy A podem ser denotados na forma paramétrica $[A]_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Também, denotamos $\text{diam}_A = a_0^{+} - a_0^{-}$ ao diâmetro de um número fuzzy A e por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ a família de todos os números fuzzy de \mathbb{R} .

Um número fuzzy triangular é um caso típico de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, cuja representação paramétrica é $[A]_{\alpha} = [(m - a_0^{-})\alpha + a_0^{-}, (m - a_0^{+})\alpha + a_0^{+}]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, em que $[A]_0 = [a_0^{-}, a_0^{+}]$ e $m = \text{core}A$. A notação de um número fuzzy triangular será dada pela terna ordenada $(a_0^{-}; m; a_0^{+})$.

Definição 2.3. [3] *Uma função com valores a número fuzzy, ou simplesmente função fuzzy, é o mapeamento $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, no qual $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

Para cada $x \in [a, b]$, denotamos os α -níveis da função fuzzy $F(x)$ por

$$[F(x)]_{\alpha} = [f_{\alpha}^{-}(x), f_{\alpha}^{+}(x)], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Definição 2.4. [4] *A derivada da função fuzzy $F(x)$, conhecida como derivada de Hukuhara, é a função $F' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ cujos α -níveis são dados por*

$$[F'(x)]_{\alpha} = [(f_{\alpha}^{-})'(x), (f_{\alpha}^{+})'(x)], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Assim, os α -níveis da derivada (fuzzy) são as derivadas (clássicas) dos extremos dos α -níveis de F . Portanto, observamos que a existência de F' (por H -diferenciabilidade) implica necessariamente na existência das derivadas clássicas $(f_\alpha^-)'$ e $(f_\alpha^+)'$ [4].

Uma vez que a derivada da Definição 2.4 é restritiva, os autores em [5] introduzem, e em [6] formalizam, o conceito de derivada generalizada de Hukuhara (gH -diferenciabilidade).

Definição 2.5. [6] *Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função fuzzy, para cada $\alpha \in [0, 1]$ e $x_0 \in [a, b]$. Dizemos que F é (1)- gH -diferenciável e para x_0 se*

$$(1) [F'(x_0)]_\alpha = [(f_\alpha^-)'(x_0), (f_\alpha^+)'(x_0)],$$

e que F é (2)- gH -diferenciável para x_0 se

$$(2) [F'(x_0)]_\alpha = [(f_\alpha^+)'(x_0), (f_\alpha^-)'(x_0)].$$

Note que a Definição 2.5 distingue duas formas intervalares possíveis ((i) e (ii)). Assim, cabe mencionar que se existe $F'(x_0)$ na primeira forma (segunda forma) com $F'(x_0) \notin \mathbb{R}$, então não existe $F'(x_0)$ na segunda forma (primeira forma) simultaneamente [6].

3 Desenvolvimento

A seguir, elaboramos a estrutura matemática necessária para resolver, de forma aproximada, o FPVC (1), mediante a combinação do uso de derivadas fuzzy e o MDF.

Primeiramente, uma vez que em (1) F é uma função fuzzy e as condições de contorno $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, consideramos que a solução deve ser uma função fuzzy (Definição 2.3), isto é, $y(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $[y(x)]_\alpha = [y_\alpha^-(x), y_\alpha^+(x)]$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Seguidamente, assumindo que em (1) o campo é duas vezes gH -diferenciável, podemos estabelecer quatro PVCs intervalares [7], em termos dos α -níveis, a partir das duas formas possíveis da gH -diferenciabilidade (Definição 2.5), dados por

PVC-(1,1)

$$\begin{cases} r(x)[(y_\alpha^-)''(x), (y_\alpha^+)''(x)] + p(x)[(y_\alpha^-)'(x), (y_\alpha^+)'(x)] + q(x)[y_\alpha^-(x), y_\alpha^+(x)] = [f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)], \\ y(a) = [a_\alpha^-, a_\alpha^+], y(b) = [b_\alpha^-, b_\alpha^+], \end{cases} \quad (2)$$

PVC-(1,2)

$$\begin{cases} r(x)[(y_\alpha^+)''(x), (y_\alpha^-)''(x)] + p(x)[(y_\alpha^-)'(x), (y_\alpha^+)'(x)] + q(x)[y_\alpha^-(x), y_\alpha^+(x)] = [f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)], \\ y(a) = [a_\alpha^-, a_\alpha^+], y(b) = [b_\alpha^-, b_\alpha^+], \end{cases} \quad (3)$$

PVC-(2,1)

$$\begin{cases} r(x)[(y_\alpha^+)''(x), (y_\alpha^-)''(x)] + p(x)[(y_\alpha^+)'(x), (y_\alpha^-)'(x)] + q(x)[y_\alpha^-(x), y_\alpha^+(x)] = [f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)], \\ y(a) = [a_\alpha^-, a_\alpha^+], y(b) = [b_\alpha^-, b_\alpha^+], \end{cases} \quad (4)$$

PVC-(2,2)

$$\begin{cases} r(x)[(y_\alpha^-)''(x), (y_\alpha^+)''(x)] + p(x)[(y_\alpha^+)'(x), (y_\alpha^-)'(x)] + q(x)[y_\alpha^-(x), y_\alpha^+(x)] = [f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)], \\ y(a) = [a_\alpha^-, a_\alpha^+], y(b) = [b_\alpha^-, b_\alpha^+], \end{cases} \quad (5)$$

A notação **PVC-(j,k)**, dos PVCs intervalares (2)-(5), significa o uso da forma (j)-gH-diferenciável para $y(x)$ e da forma (k)-gH-diferenciável para $y'(x)$, com $j, k \in \{1, 2\}$.

Cada um dos PVCs intervalares fornece um sistema de duas equações diferenciais ordinárias (EDOs) e condições de contorno determinísticas (já que os extremos intervalares são funções reais) para cada $\alpha \in [0, 1]$. Por exemplo, para o PVC (2), que é equivalente ao uso da derivada de Hukuhara (Definição 2.4), temos

$$\begin{cases} r(x)(y_\alpha^-)''(x) + p(x)(y_\alpha^-)'(x) + q(x)y_\alpha^-(x) = f_\alpha^-(x), \\ y_\alpha^-(a) = a_\alpha^-, y_\alpha^-(b) = b_\alpha^-, \\ r(x)(y_\alpha^+)''(x) + p(x)(y_\alpha^+)'(x) + q(x)y_\alpha^+(x) = f_\alpha^+(x), \\ y_\alpha^+(a) = a_\alpha^+, y_\alpha^+(b) = b_\alpha^+. \end{cases} \quad (6)$$

Assim, é possível resolver cada sistema associado, a cada PVC intervalar, pelo MDF o qual implica na discretização do domínio do problema. Para tal fim, considera-se a partição $\tau_h : a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, do intervalo $[a, b]$, em n subintervalos de comprimento homogêneo uniforme $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, e o esquema de diferenças centradas de segunda ordem [1], baseado na serie de Taylor clássica, que aproxima o valor das derivadas primeira e segunda, de uma função real X , da forma:

$$\begin{aligned} X_i'' &\approx \frac{X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad e \\ X_i' &\approx \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{2\Delta x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Logo, fazendo $x_i = a + (i - 1)\Delta x$, considerando a aproximação (constante por partes) para $y(x_i) = y_i$, $r_i = r(x_i)$, $p_i = p(x_i)$ e $q_i = q(x_i)$, com $i = 2, \dots, n$, e as aproximações do esquema de diferenças centradas de (7), obtemos $n - 1$ equações lineares, que representam, em forma discreta, cada EDO nos sistemas associados aos quatro PVCs intervalares. Assim, no caso do sistema (6) temos

$$\begin{aligned} r_i \frac{(y_\alpha^-)_{i-1} - 2(y_\alpha^-)_i + (y_\alpha^-)_{i+1}}{(\Delta x)^2} + p_i \frac{(y_\alpha^-)_{i+1} - (y_\alpha^-)_{i-1}}{2\Delta x} + q_i (y_\alpha^-)_i &= (f_\alpha^-)_i, \quad e \\ r_i \frac{(y_\alpha^+)_{i-1} - 2(y_\alpha^+)_i + (y_\alpha^+)_{i+1}}{(\Delta x)^2} + p_i \frac{(y_\alpha^+)_{i+1} - (y_\alpha^+)_{i-1}}{2\Delta x} + q_i (y_\alpha^+)_i &= (f_\alpha^+)_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Para resolver as $2(n - 1)$ equações lineares em (8), correspondentes ao sistema (6), para cada $\alpha \in [0, 1]$, em termos das soluções requeridas $(y_\alpha^-)_i$ e $(y_\alpha^+)_i$ com $i = 1, 2, \dots, n + 1$ (já que $y(a)$ e $y(b)$ são números fuzzy dados), é configurada uma estrutura matricial $Sy = d$, dada por

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix}, \quad y^T = [(y_\alpha^-)_1 \quad \dots \quad (y_\alpha^-)_{n+1} \quad (y_\alpha^+)_1 \quad \dots \quad (y_\alpha^+)_{n+1}] \quad e \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, no caso específico do sistema (6), temos que $S_2 = \mathbb{O}_{n+1}$ e

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{p_1}{2\Delta x} & \frac{-2}{(\Delta x)^2} + q_1 & \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{p_1}{2\Delta x} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{p_2}{2\Delta x} & \frac{-2}{(\Delta x)^2} + q_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{p_n}{2\Delta x} & \frac{-2}{(\Delta x)^2} + q_n & \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{p_n}{2\Delta x} \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_1^T = [a_\alpha^- \quad (f_\alpha^-)_2 \quad \cdots \quad (f_\alpha^-)_n \quad b_\alpha^-] \quad \text{e} \quad d_2^T = [a_\alpha^+ \quad (f_\alpha^+)_2 \quad \cdots \quad (f_\alpha^+)_n \quad b_\alpha^+].$$

Dependendo das configurações estabelecidas pela gH -diferenciabilidade nos PVCs (3), (4) e (5), o formato das $2(n - 1)$ equações lineares e os elementos das matrizes S_1 e S_2 , em cada caso, muda (por exemplo, S_2 deixa de ser nula, isto é, $S_2 \neq \mathbb{O}_n$).

Cabe mencionar que, a configuração do esquema centrado e a estrutura matricial estabelecida para resolver o FPVC (2), segundo o sistema (6), isto é, so considerando a derivada de Hukuhara, aparece em [8] e que soluções via MDF para estruturas a partir dos PVCs (3), (4) ou (5), ou seja, contemplando o uso da gH -diferenciabilidade, foram tentadas (mas com diferente esquema centrado) em [9].

4 Exemplo

Considere o FPVC, que modela a equação de Bessel de ordem $1/2$, linear e com coeficientes variáveis em $x \in [1, 15]$, dado por [10]

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \frac{1}{4}) y(x) = F(x), \\ y(1) = A, \quad y(15) = B, \end{cases} \tag{9}$$

onde $A = (0.5; 1; 1.5)$, $B = (-0.25; 0; 0.25)$ e $F(x) = F = (-2; 0; 2)$, isto é, A , B , e $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Portanto, podemos representar (ver Figura 1) as quatro formas intervalares distintas, (2)-(5), da gH -diferenciabilidade.

As simulações computacionais foram realizadas para $n = 128$ subintervalos na discretização do domínio para $x \in [1, 15]$. Também, a estabilidade do esquema numérico foi conferida uma vez que o Núcleo de Pécelet (≈ 1.6406) foi menor que 2.

5 Conclusões

Neste trabalho foi possível estabelecer soluções numéricas para FPVCs com termo fonte dado por uma função fuzzy e para condições de contorno modeladas por números fuzzy. Cada solução aproximada foi obtida via o Método de Diferenças Finitas (MDF) combinado com esquemas intervalares a partir da derivada generalizada de Hukuhara (quatro formas para um FPVC linear, de segunda ordem, com coeficientes variáveis).

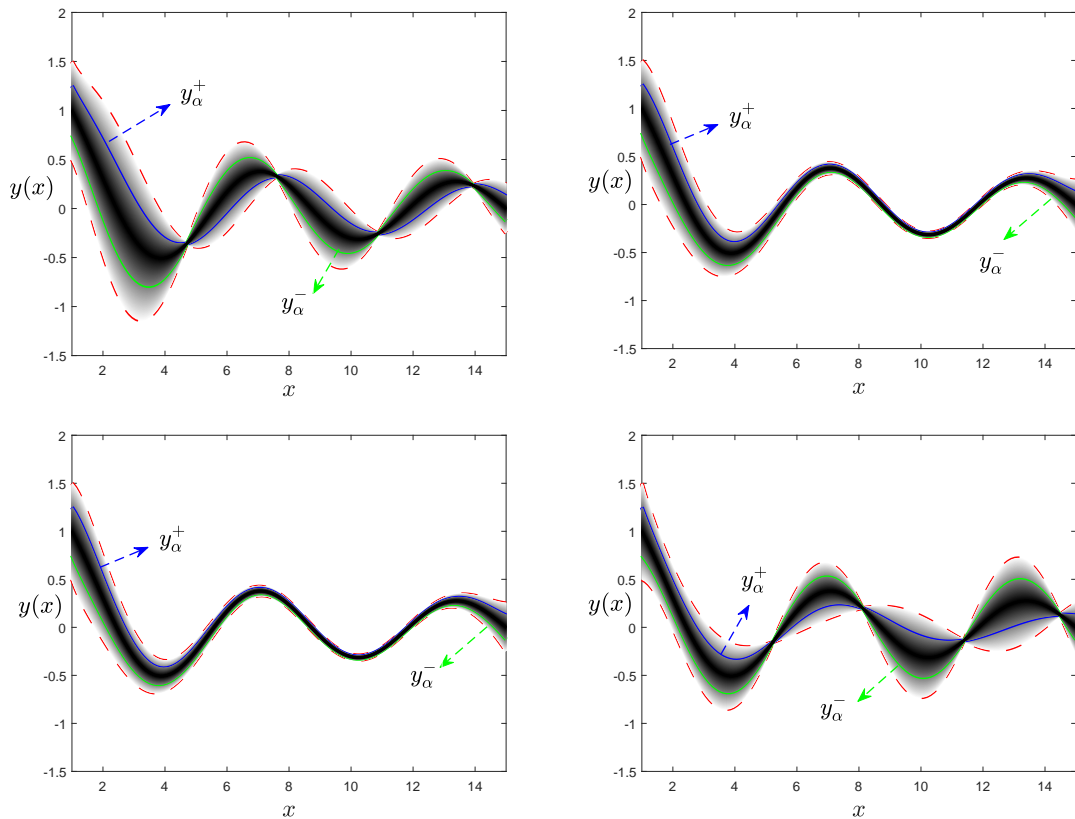


Figura 1: Solução fuzzy de (9), via MDF, dos quatro esquemas na gH -diferenciabilidade, (2)-(5), da esquerda para a direita e de cima para baixo.

A partir das soluções numéricas do exemplo apresentado, visualizadas na Figura 1, não podemos discernir qual das quatro formas é a solução fuzzy a escolher, nem comprovar se são ou não duas vezes gH -diferenciáveis (porque não temos solução analítica para derivar). Porém, as formas primeira e quarta apresentam situações de mudança imprópria de números fuzzy, portanto, as formas segunda e terceira ficam sendo as melhores interpretações da forma sinusoidal decrescente da equação de Bessel (de múltiplas aplicações em diversos campos da ciência como electromagnetismo, processos de condução de calor e difusão, processamento de sinais, vibrações e radiação acústica, entre outras).

Conferimos que o esquema via MDF e a gH -diferenciabilidade constituem uma eficiente ferramenta para resolver qualquer FPVC linear com coeficientes variáveis quando soluções fuzzy analíticas não sejam possíveis de obter. Finalmente, trabalhos futuros podem se enquadrar na abordagem para FPVCs não lineares e/ou considerando outros tipos de derivadas fuzzy.

Agradecimentos

Esta pesquisa foi parcialmente apoiada pelo CONICYT do Chile, a FAPESP sob o processo n° 2016/26040-7 e CNPq sob o processo n° 306546/2017-5.

Referências

- [1] R. J. Leveque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Vol. 98. SIAM, 2007.
- [2] D. Sánchez, L. C. de Barros. PVC com condições de contorno Fuzzy: Solução baseada em Método de elementos finitos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 6(1), 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0421.
- [3] M. L. Puri, D. A. Ralescu. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91:552-558, 1983.
- [4] L. C. de Barros, R. C. Bassanezi, and W. A. Lodwick. A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics. Theory and Applications. In *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, 2017.
- [5] B. Bede, S. G. Gal. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*, 151:581-599, 2005.
- [6] Y. Chalco-Cano, H. Roman-Flores. On new solutions of fuzzy differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38:112-119, 2008.
- [7] A. Khastan, J. J. Nieto. A boundary value problem for second order fuzzy differential equations. *Nonlinear Analysis*, 72:3583-3593, 2010.
- [8] A. Dahalan, M. Muthuvalu, J. Sulaiman. Successive over relaxation method in solving two-point fuzzy boundary value problems. *AIP Conf. Proceedings*, 1522:116-124, 2013.
- [9] T. Allahviranloo, K. Khalilpour. A numerical method for two-point fuzzy boundary value problems. *World Applied Sciences Journal*, 13(10):2137-2147, 2011.
- [10] R. K. Nagle, E. B. Saff, A. D. Snider. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Pearson Educación, México, 2005.