Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Medidas com sinal e o Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Gustavo Vicente de Souza[1]
Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta[2]
Depto. de Matemática, Estatística e Computação, FCT-UNESP, 19060-900, Pres. Prudente, SP

## Objetivos

A Teoria da Medida consiste em uma importante área da Matemática que dedica-se a generalização dos conceitos de área, volume, etc. Suas aplicações são múltiplas permeando todas as áreas da matemática e sendo imprescindível em áreas como a Teoria da Probabilidade, Sistemas Dinâmicos e outras. Nesse trabalho apresentamos um dos resultados centrais nessa teoria, tratando esse de uma forma de decomposição de uma medida em termos de outras duas medidas, uma delas singular e a outra absolutamente contínua com respeito a uma certa medida fixada. Esse resultado também nos permite definir o conceito de diferenciação de medidas, o que é fundamental para a teoria das chamadas Medidas de Radon bem como permite que se generalize um resultado importante da Análise Funcional, consistindo esse no Teorema de Representação de Riesz.

Os objetivos são introduzir as medidas com sinal e estudar o Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, de modo a possibilitar futuro aprofundamento nessa teoria.

## Material e Métodos

A metodologia é a comumente empregada em pesquisa teórica em matemática, consistindo em pesquisa bibliográfica.

## Resultados e discussão

**Teorema da decomposição de Hahn:** *Seja $\nu$ uma medida com sinal sobre $(X, \mathcal{M})$. Então, existe um conjunto positivo $P$ e um conjunto negativo $N$, ambos segundo $\nu$ tais que $P \cup N = X$ e $P \cap X = \varnothing$. Se $P^1$ e $N^1$ é um outro par nestas condições, então $P \Delta P^1 (= N \Delta N^1)$ tem medida nula com respeito a $\nu$.*
**Teorema da decomposição de Jordan:** *Seja $\nu$ uma medida com sinal. Então, existe duas únicas medidas positivas $\nu^+$ e $\nu^-$ tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$.*

[1]gustavovicente1997@gmail.com
[2]pimenta@fct.unesp.br

 

**Corolário:** *Se* $f \in L^1(\mu)$, *para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|\int_E f d\mu| < \epsilon$ *sempre que* $\mu(E) < \delta$

**Lema:** *Sejam* $\nu$ *e* $\mu$ *duas medidas finitas sobre* $(X, \mathcal{M})$. *Então ou* $\nu \ll \mu$ *ou existem* $\epsilon > 0$ *e* $E \in \mathcal{M}$ *tais que* $\mu(E) > \epsilon$ *e* $\nu \geq \epsilon\mu$ *sobre* $E$.

**Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym:** *Seja* $\nu$ *uma medida com sinal* $\sigma$*-finita e* $\mu$ *uma medida positiva* $\sigma$*-finita, ambas sobre* $(X, \mathcal{M})$. *Existem duas únicas medidas com sinal sigma-finitas* $\lambda$ *e* $\rho$ *sobre* $(X, \mathcal{M})$ *tais que* $\lambda \perp \mu$, $\rho\mu$, *e* $\nu = \lambda + \rho$. *Ainda, existe uma função* $\mu$*-integrável estendida* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $d\rho = f d\mu$. *Ainda mais,* $f$ *é única a menos de um conjunto de medida nula segundo* $\mu$.

## Conclusões

O Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym é uma ferramenta fundamental no estudo da Teoria da Medida pois nos diz como decompor uma medida com respeito a outras duas, guardando certas propriedades entre si. Trata-se de um resultado profundo e que exige o estudo prévio de vários conceitos para a definição de medidas como as $\sigma-$ álgebras, medidas exteriores, etc.

Como resultado obteve-se o conhecimento de um importante resultado na Teoria da Medida, o que possibilitará um aprofundamento nos estudos sobre esta importante área de pesquisa em Matemática.

## Referências

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.

[2] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons, 2 edition, New York, 1999.