Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equações Dinâmicas Lineares de Primeira Ordem em Escalas Temporais

Enrico Sonvenso Ambrosio[1]
Departamento de Matemática e Computação, FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Roberto de Almeida Prado[2]
Departamento de Matemática e Computação, FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

Equações dinâmicas em escalas temporais têm sido objeto de estudo de vários pesquisadores, com o intuito de unificar as teorias de equações diferenciais e de equações de diferença (ver [1, 2]). Neste trabalho estudamos a equação dinâmica linear de 1ª ordem

$$y^{\Delta} = p\,(t)\,y + g(t) \tag{1}$$

para funções $p, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-contínuas com p regressiva, definidas sobre uma escala temporal $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. A notação y^{Δ} indica a delta-derivada da função $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ a ser determinada (ver definições adiante).

Para enunciarmos o principal resultado deste trabalho (Teorema 1) introduziremos primeiramente alguns conceitos preliminares do cálculo em escalas temporais (ver [1, 2]). Uma escala temporal $\mathbb{T}$ é qualquer subconjunto fechado dos números reais $\mathbb{R}$. Definimos os operadores $\sigma, \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ por $\sigma\,(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ e $\rho\,(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$, onde $\inf \emptyset := \max \mathbb{T}$ e $\sup \emptyset := \min \mathbb{T}$. Um ponto $t \in \mathbb{T}$ é dito denso à esquerda, disperso à esquerda, denso à direita ou disperso à direita se $\rho\,(t) = t$, $\rho\,(t) < t$, $\sigma\,(t) = t$ ou $\sigma\,(t) > t$, respectivamente. Definimos $\mu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}_0^+$ por $\mu\,(t) = \sigma\,(t) - t$. Agora, seja $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$ se $\sup \mathbb{T} = \infty$ e $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} \backslash \left(\rho\,(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}\right]$ se $\sup \mathbb{T} < \infty$.

Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é dita *delta-diferenciável* em $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ se existe um número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança U de t de modo que

$$|f\,(\sigma\,(t)) - f\,(s) - \alpha\,(\sigma\,(t) - s)| \le \epsilon\,|\sigma\,(t) - s|\,, \quad \forall s \in U.$$

Neste caso, dizemos que α é a *delta-derivada* de f em t e escrevemos $\alpha = f^{\Delta}\,(t)$. Para a escala temporal $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ temos $\sigma\,(t) = \rho\,(t) = t$, $\mu\,(t) = 0$ e se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é delta-diferenciável então $f^{\Delta}\,(t) = \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f\,(t) - f\,(s)}{t - s} = f'\,(t)$; logo, equações dinâmicas em $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ são equações diferenciais ordinárias. Já para escala temporal $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, temos que $\sigma\,(t) = t+1$, $\rho\,(t) = t-1$, $\mu\,(t) = 1$, e $f^{\Delta}\,(t) = \dfrac{f\,(\sigma\,(t)) - f\,(t)}{\mu\,(t)} = f\,(t+1) - f\,(t)$ para toda função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$; assim, as equações dinâmicas em $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ são equações de diferença.

[1]ambrosio.live@hotmail.com, bolsista FAPESP
[2]robertoprado@fct.unesp.br

Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada *rd-contínua* se ela é contínua nos pontos de $\mathbb{T}$ densos à direita e existem os limites laterais de f à esquerda nos pontos de $\mathbb{T}$ densos à esquerda. Uma função $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ com $F^{\Delta}(t) = f(t)$ para $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, é chamada uma *antiderivada* de f, e definimos a *delta-integral* $\int_a^b f(\tau)\,\Delta\tau = F(b) - F(a)$, onde $a, b \in \mathbb{T}$. É bem conhecido que toda função rd-contínua tem uma antiderivada (Teorema 1.74 em [1]).

Vamos agora introduzir um conceito relacionado às equações dinâmicas. Uma equação do tipo (1) é dita *regressiva* se as funções $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ são rd-contínuas com p sendo regressiva, isto é, $1 + \mu(t)\,p(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Para $t_0 \in \mathbb{T}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ e p função rd-contínua e regressiva, a única solução do PVI (problema de valor inicial) constituído pela equação homogênea $y^{\Delta} = p(t)\,y$ e a condição inicial $y(t_0) = y_0$ é dada por $y(t) = e_p(t, t_0)\,y_0$ (Teorema 2.62 em [1]), em que $e_p(\cdot, t_0)$ é a *função exponencial* definida por

$$e_p(t, s) = \exp\left\{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\,\Delta\tau\right\} \quad \text{com} \quad \xi_h(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Log}(1 + zh)}{h} & \text{se} \quad h \neq 0 \\ z & \text{se} \quad h = 0. \end{cases}$$

Por exemplo, se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então $e_p(t, s) = \exp\left\{\int_s^t p(\tau)\,d\tau\right\}$ para $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, daí $e_\alpha(t, s) = e^{\alpha(t-s)}$ para $p = \alpha$ constante, e $e_1(t, 0) = e^t$. Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, então $e_\alpha(t, s) = (1 + \alpha)^{t-s}$ para $\alpha \neq -1$ e $e_1(t, 0) = 2^t$.

O teorema a seguir é o principal resultado deste trabalho, cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 1. ***(Variação de Parâmetros)*** *Suponha a equação* (1) *regressiva. Sejam* $t_0 \in \mathbb{T}$ *e* $y_0 \in \mathbb{R}$. *A única solução do PVI*

$$y^{\Delta} = p(t)\,y + g(t), \quad y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

é dada por

$$y(t) = e_p(t, t_0)\,y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))\,g(\tau)\,\Delta\tau. \tag{3}$$

Quando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ a função $y(t)$ dada por (3) é a solução usual do PVI (2) para uma EDO linear de 1ª ordem.

Exemplo. Considere o PVI: $y^{\Delta} = 2y + 3^t$, $y(0) = 0$, em $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. As funções $p(t) = 2$ e $g(t) = 3^t$ são rd-contínuas e p é regressiva. Pelo Teorema 1 a única solução deste PVI é

$$y(t) = e_p(t, 0) \cdot 0 + \int_0^t e_p(t, \tau + 1)\,3^{\tau}\ \Delta\tau = \int_0^t \exp\left\{\int_{\tau+1}^t \xi_1(2)\,\Delta\tau\right\} 3^{\tau}\ \Delta\tau \ = \ t\ 3^{t-1}.$$

Referências

[1] M. Bohner and A. Peterson. *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*. Birkhäuser, Boston, 2001.

[2] M. Bohner and A. Peterson. First and Second Order Linear Dynamic Equations on Time Scales, *Journal of Difference Equations and Applications*, 7:6, 767-792, 2001.

