Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicações de Elementos de Geometria Hiperbólica em Sistemas de Comunicação

Thomás Francisco de Abreu[1]
Departamento de Matemática, Unifal, Alfenas, MG
Anderson José de Oliveira[2]
Departamento de Matemática, Unifal, Alfenas, MG

1 Introdução

Segundo [1], acredita-se que o primeiro uso da geometria foi feito pelos egípcios no processo de demarcação de terras. Pela ocorrência de transbordações do Rio Nilo, as terras perdiam suas marcações, acarretando a existência de agrimensores para demarcarem estas terras novamente.

Em "Os Elementos", Euclides utiliza cinco postulados e, a partir deles, cria toda a fundamentação teórica da Geometria Euclidiana. No entanto, alguns matemáticos acreditavam que o quinto postulado de Euclides deveria ser demonstrado, iniciando a história da Geometria Hiperbólica.

Na segunda metade do século XIX, Carl Friedrich Gauss percebeu que não haveria uma demonstração para o postulado, mas que seus resultados, e de outros matemáticos que tentaram a demonstração antes dele, estavam corretos e poderiam fundamentar uma nova Geometria, a Geometria Hiperbólica.

De acordo com [3], os principais elementos de um sistema de comunicação são: uma fonte, um emissor de informação, um canal de transmissão e um receptor. Neste canal de transmissão podem ocorrer ruídos que comprometem a confiabilidade da mensagem.

O objetivo deste trabalho é apresentar os principais elementos da Geometria Hiperbólica, assim como relacioná-los a sistemas de comunicação, a fim de caracterizar o processo de transmissão de informações entre usuários.

2 Materiais e Métodos

De acordo com [2] o estudo da Geometria Hiperbólica é baseado em modelos hiperbólicos, sendo que os mais importantes são: o disco de Poincaré, o semiplano superior e o disco de Beltrami-Klein. Além disso, outros elementos são de vital importância no processo de caracterização deste trabalho: as transformações de Möbius, que podem ser classificadas em parabólicas, elípticas e hiperbólicas, a geração de grupos fuchsianos, além da obtenção do gênero da superfície, por meio da característica de Euler.

Sistemas de comunicação são compostos, basicamente, por um emissor, um destinatário e um canal de comunicação por onde a informação passa. Deseja-se que a informação

[1]abreu.thomas.ta@gmail.com
[2]ajoliveira01@gmail.com

chegue ao destinatário com maior confiabilidade possível e, para isso, precisamos que o ruído (obstáculos que podem ocorrer durante a transmissão de informação) seja reduzido ou controlado [3]. Com os elementos de Geometria Hiperbólica, pode-se caracterizar um canal de comunicação de forma a identificar as superfícies de gênero mínimo (g_{min}) e gênero máximo (g_{max}) relacionado ao mesmo, como forma de analisar o mergulho desses canais de comunicação em grafos, cujo objetivo é analisar a probabilidade de erro no processo de transmissão da informação [4].

3 Resultados

Considere o canal de comunicação $C_{2,2}$, ou seja, com duas entradas e duas saídas. De acordo com [4], este canal pode ser mergulhado em superfícies com $g_{min} = 0 = g_{max}$, caracterizando uma esfera. Podemos estabelecer uma conexão deste resultado com os emparelhamentos dos lados de um triângulo hiperbólico. Considere como vértices os valores 0, 2 e ∞ e tomemos 0 e 2 como a entrada e a saída de um canal $C_{2,2}$. Aplicando transformações de emparelhamentos de lados a esse polígono, apresentadas na equação 1, obtemos:

$$\gamma_1 = -z + 2 \quad \text{(elíptica)} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = z + 2 \quad \text{(parabólica)}, \tag{1}$$

por meio da transformação de Möbius, dada pela equação 2:

$$\gamma_z = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{2}$$

e pela aplicação da característica de Euler, apresentada pela equação 3:

$$2 - 2g = V - A + F = 3 - 2 + 1 = 2 \rightarrow g = 0, \tag{3}$$

obtemos a esfera.

Através dessa conexão, estabelecemos um elo entre o canal de comunicação $C_{2,2}$ e alguns elementos de Geometria Hiperbólica.

Agradecimentos

Agradecemos à Fapemig e a Unifal-MG, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] BRAZ, F.M.; História da Geometria Hiperbólica. Belo Horizonte-MG. 2009.

[2] MAGALHÃES, J.M. Um estudo dos Modelos da Geometria Hiperbólica. Dissertação de Mestrado. Universidade de Geociências e Ciências Exatas Câmpus de Rio Claro. Rio Claro-SP. 2015.

[3] LIN, S.; COSTELLO Jr., D. J. Error control coding: fundamentals and applications. Prentice Hall, 1983.

[4] OLIVEIRA, A. J.; PALAZZO JR, R. Gometric and algebraic structures associated with the channel quantization problem, Computational and Applied Matehamatics, 2017.