Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Algumas Propriedades dos Zeros de Polinômios Palindrômicos

Karina Seviero Rampazzi[1]
Licenciatura em Matemática, UNESP, Presidente Prudente, SP
Vanessa Botta[2]
Departamento de Matemática e Computação, UNESP, Presidente Prudente, SP

1 Introdução

Seja $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ um polinômio palindrômico com $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ e $a_n > 0$ e seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Seja a função $L : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$L(a) := \min_{y \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - y|.$$

Seja σ uma permutação sobre $1, 2, \ldots, n-1$ para qual $a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq a_{\sigma(n-1)}$. Se n é par, então $L(a) = \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{\sigma(n/2)}|$. Por outro lado, se n é ímpar, então $L(a) = \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - y|$ para todo y em um intervalo fechado $[a_{\sigma(\lfloor n/2 \rfloor)}, a_{\sigma(\lceil n/2 \rceil)}]$. Aqui, $\lfloor t \rfloor := max(\infty, t] \cap \mathbb{Z}$ e $\lceil t \rceil := min[t, \infty) \cap \mathbb{Z}$.

O objetivo deste trabalho é apresentar um resultado, que fornece condições necessárias e suficientes, para que os zeros de polinômios palindrômicos, um caso especial dos polinômios auto-inversíveis, estejam no círculo unitário, ou seja, na região $|z| = 1$. As condições que serão apresentadas dependerão de $L(a)$ e do coeficiente dominante a_n.

A seguir são apresentadas algumas definições importantes para o desenvolvimento deste estudo.

Definição 1.1. *Seja o polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{R}$. Associado ao polinômio $P(z)$ considere o polinômio $P^*(z)$, dado por*

$$P^*(z) = z^n \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{a}_0 z^n + \overline{a}_1 z^{n-1} + \ldots + \overline{a}_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k z^{n-k} = \overline{a}_0 \prod_{j=1}^{n} (z - z_j^*), \qquad (1)$$

cujos zeros $z_k^* = \dfrac{1}{\overline{z}_k}$ são os inversos conjugados dos zeros z_k.

[1]karinarampazzi@hotmail.com
[2]botta@fct.unesp.br

Definição 1.2. *Considerando* $a_i \in \mathbb{R}$, *então* $P(z) = P^*(z)$, *isto é,* $P(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$, *o polinômio* $P(z)$ *é dito palindrômico.*

2 Resultado Principal

O resultado abaixo pode ser encontrado em [1].

Teorema 2.1. *Seja* $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ *um polinômio palindrômico com* $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *e* $a_n > 0$ *e seja* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

(a) Suponha que $\underline{m}(a) + L(a) \leq 2a_n$.

- *(i) Se* $P(1) \geq 0$, *então todos os zeros de* $P(z)$ *estão no círculo unitário. Nesse caso, há pelo menos dois zeros da forma* $e^{i\theta}$ *com* $\frac{-2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.
- *(ii) Se* $P(1) < 0$, *então* $P(z)$ *tem zeros reais* $\beta > 1$ *e* β^{-1} *e outros zeros estão no círculo unitário.*

(b) Suponha que $\overline{m}(a) \geq L(a) + 2a_n$. *Então,*

- *(i) Todos os zeros de* $P(z)$ *estão no círculo unitário. Quando* n *é ímpar, há* 3 *ou* 5 *zeros da forma* $e^{i\theta}$ *com* $\frac{(n-1)\pi}{n} \leq \theta \frac{(n+1)\pi}{n}$. *Quando* n *é par,* -1 *é um zero de multiplicidade* 2 *ou* 4.
- *(ii)* $P(z)$ *tem zeros reais* $\beta < -1$ *e* β^{-1} *e os outros zeros estão no círculo unitário.*

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processo Número 2016/08051-1).

Referências

[1] D. Kwon, Reciprocal polynomials with all but two zeros on the unit circle, *Acta Math. Hung.*, 134 (4):472-480, 2011.