Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de Sistemas Intervalares Aplicados em Problemas Físicos com Imprecisões Numéricas

Daniel B. S. de Lima[1]
Centro de Tecnologia, UFRN, Natal, RN
Marcos H. F. Marcone[2]
Escola de Ciências e Tecnologia, UFRN, Natal, RN
Fabiana T. Santana[3]
Escola de Ciências e Tecnologia, UFRN, Natal, RN

As incertezas em dados numéricos estão muito presentes na área computacional e nas ciências que lidam com experimentos. Essas incertezas surgem quando se torna necessário registrar um valor real ou estimar alguma grandeza física.

O sistema computacional de ponto flutuante é limitado e, por isso, não pode representar os infinitos números reais. Na prática, as representações computacionais de cálculos numéricos utilizam truncamentos e arredondamentos e retornam um número aproximado, porém muito próximo do real [4]. Os problemas podem ocorrer quando os cálculos são extensos e os números aproximados vão em cada etapa gerando novos valores aproximados comprometendo o resultado final.

Já nas ciências experimentais, as imprecisões numéricas podem ser de natureza direta ou indireta. Essas incertezas podem surgir diretamente ao medir ou estimar o valor de uma grandeza ou indiretamente através de cálculos que utilizam os dados numéricos obtidos do experimento. Nessas áreas, como Física, utiliza-se a Teoria de Erros para obter o valor do experimento o mais próximo possível do valor verdadeiro e com o máximo de informação [3].

Outra forma de lidar com as incertezas numéricas, tanto computacionais como experimentais, é através da Matemática Intervalar. Esta teoria, introduzida por Moore em 1966, que utiliza intervalos reais para representar dados exatos e incertos, conta hoje com várias aritméticas e está sendo utilizada em várias teorias e aplicações da Matemática [1, 2].

Neste trabalho, utilizaremos a Matemática Intervalar, juntamente com a aritmética de Moore para lidarmos com sistemas intervalares oriundos de experimentos físicos.

Um intervalo real $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ é constituído por todos os números reais compreendidos entre $\underline{x}$ e $\overline{x}$. O conjunto desses intervalos será denotado por $\mathbb{IR}$.

Definição 0.1. *A aritmética de Moore, define para todos* $X = [\underline{x}, \overline{x}], Y = [\underline{y}, \overline{y}] \in \mathbb{IR}$ *as seguintes operações:* $X + Y = [\underline{x} + \underline{y}; \overline{x} + \overline{y}]$*;* $X - Y = [\underline{x} - \overline{y}; \overline{x} - \underline{y}]$*;* $X \times Y =$

[1]danielgts123@hotmail.com
[2]marcosmarcone48@gmail.com
[3]fabianasantana@ect.ufrn.br

$[min\{\underline{x}.\underline{y}, \underline{x}.\overline{y}, \overline{x}.\underline{y}, \overline{x}.\overline{y}\}, max\{\underline{x}.\underline{y}, \underline{x}.\overline{y}, \overline{x}.\underline{y}, \overline{x}.\overline{y}\}]$ *e* $\frac{X}{Y} = X \times Y^{-1} = [min\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\},$ $max\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\}]$, *desde que* $0 \notin Y$.

Segundo [1], um vetor intervalar x^I é definido por $x^I = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ou $x^I = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{bmatrix}^T$, onde $X_i \in \mathbb{IR}$ e o vetor real $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset x^I$ se $x_i \in X_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Uma matriz intervalar de m linhas e n colunas é definida por $A^I = (A_{ij})_{m \times n}$, onde $A_{ij} \in \mathbb{IR}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ e a matriz real $A = (a_{ij})_{m \times n} \subset A^I$ se $a_{ij} \in A_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. As operações com as matrizes intervalares se comportam como no caso pontual, porém adotando a aritmética de Moore para operar com os termos intervalares envolvidos [1].

O objetivo deste trabalho é modelar sistemas oriundos de experimentos utilizando a Matemática Intervalar, através de sistemas intervalares do tipo $A^I x^I = b^I$, onde $A^I = (A_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} [\underline{A}_{11}, \overline{A}_{11}] & \ldots & [\underline{A}_{1n}, \overline{A}_{1n}] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [\underline{A}_{m1}, \overline{A}_{m1}] & \ldots & [\underline{A}_{mn}, \overline{A}_{mn}] \end{bmatrix}$ é a matriz intervalar correspondente aos coeficientes das variáveis, $x^I = \begin{bmatrix} [\underline{x}_1, \overline{x}_1] & \ldots & [\underline{x}_n, \overline{x}_n] \end{bmatrix}^T$ é um vetor intervalar que representa as variáveis e $b^I = \begin{bmatrix} [\underline{b}_1, \overline{b}_1] & \ldots & [\underline{b}_m, \overline{b}_m] \end{bmatrix}^T$ é o vetor intervalar correspondente aos termos independentes do sistema. A solução intervalar é constituída pela solução ínfima e suprema correspondentes aos sistemas $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$ e $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$, onde $\underline{A}$ é a matriz real constituída pelos extremos inferiores $\underline{A}_{ij}$, $\underline{b}$ é um vetor real constituído pelos extremos inferiores $\underline{b}_j$, $j = 1, \ldots, m$ e $\underline{x}$ é o extremo inferior da solução constituída pelos extremos $\underline{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Para o sistema $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$, os termos $\overline{A}$, $\overline{x}$ e $\overline{b}$ são definidos analogamente utilizando os extremos superiores dos respectivos intervalos.

No experimento para obter a função horária $s(t) = s_0 + vt$ de um carro que se movia livremente com aceleração nula sobre um trilho de ar horizontal, a cada dado $(t, s(t))$ associou-se o vetor intervalar $[[t - 0.01, t + 0.01]\ [s(t) - 0.01, s(t) + 0.01]]^T$, com incerteza de 0.01. As soluções dos sistemas $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$ e $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$, obtidas por Mínimos Quadrados, forneceu a solução intervalar $[\underline{s}(t), \overline{s}(t)] = [0.0650, 0.0691] + [0.7959, 0.7959]t$ que, comparada com a solução clássica $s(t) = (0.0670 \pm 0.073) + (0.796 \pm 0.093)t$, obtida com o software Pasco Capstone, mostrou precisão para o coeficiente v e menor incerteza para s_0.

Referências

[1] E. Hansen, G. W, Walster. Global optimization using interval analysis: revised and expanded. In *Pure and Applied Mathematics Series*. Vol. 264. CRC Press, 2003.

[2] R. E. Moore. *Interval Analysis*, Prentice Hall, New Jersey. 1966.

[3] H. N. Nagashima. Laboratório de Física I. Disponível em: < http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/fisicaequimica/relacaodedocentes973/labfisicai.2010.pdf>. Acesso em: 13 de mar. de 2018.

[4] M. L. Overton. *Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic*, SIAM, Philadelphia, 2001.