Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Reticulados bem arredondados em $\mathbb{R}^2$

William Lima da Silva Pinto[1]
Matemática, UNESP, Rio Claro, SP
Carina Alves[2]
Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP

1 Introdução

As aplicações dos estudos de reticulados se estendem a diversas áreas, como por exemplo à área da Teoria da Informação, devido sua representatividade de constelações de sinais para os canais Gaussiano e com desvanecimento do tipo Rayleigh. Diferentes aplicações práticas requerem reticulados com diferentes propriedades. Por exemplo, reticulados com alta densidade de centro são vantajosos para canais com desvanecimento do tipo Rayleigh. Já em outras situações é interessante estudar problemas relacionados ao *kissing number* ou à diversidade de reticulados. Neste trabalho, investigamos a classe de reticulados bem arredondados (do inglês, *well-rounded*), que vem sendo estudada recentemente e que apresenta boas propriedades para aplicações práticas.

2 Reticulados bem arredondados

Intuitivamente, um reticulado em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto infinito e discreto de pontos do $\mathbb{R}^n$ dispostos de forma regular. Formalmente, se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$ (tal que $m \leq n$) então o conjunto de pontos

$$\Lambda = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i, \ \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1}$$

é chamado um reticulado de posto m e o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é chamado uma base do reticulado. Diz-se que o posto é completo quando $m = n$.

Neste contexto, se Λ é um reticulado em $\mathbb{R}^n$ de posto completo, define-se o mínimo de Λ e o conjunto dos vetores mínimos de Λ, respectivamente por:

$$|\Lambda| = min\{\|x\|^2 : x \in \Lambda, \ x \neq 0\} \tag{2}$$

e

$$S(\Lambda) = \{x \in \Lambda : \|x\|^2 = |\Lambda|\}, \tag{3}$$

[1]william26535@hotmail.com
[2]carina@rc.unesp.br

onde $\| \ \|$ é a norma euclidiana usual em $\mathbb{R}^n$. Graficamente, os elementos de $S(\Lambda)$ são aqueles de menor distância até a origem (exceto ela mesma).

Postas as definições, o reticulado é considerado bem arredondado se $S(\Lambda)$ gera $\mathbb{R}^n$. Em $\mathbb{R}^2$, verificamos que reticulados têm sempre dois, quatro ou seis vetores mínimos. Além disso, são bem arredondados se, e somente se, possuem quatro ou seis vetores mínimos.

Dentre os reticulados do tipo $\sigma(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo quadrático, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ é o anel dos inteiros de $\mathbb{K}$ e $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^n$ é o homomorfismo canônico, veremos que os únicos reticulados bem arredondados são justamente o reticulado $\mathbb{Z}^2$ e o reticulado hexagonal, ou seja, quando $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, respectivamente. No entanto, existem infinitos corpos quadráticos $\mathbb{K}$ tais que $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ contém um ideal $\mathcal{I}$ tal que $\sigma(\mathcal{I})$ é bem arredondado.

Por fim, verificamos que todos os reticulados bem arredondados de seis vetores mínimos são semelhantes ao reticulado hexagonal, seja por dilatação ou translação, bem como existem infinitas classes de reticulados bem arredondados de quatro vetores mínimos.

No caso de reticulados em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, a propriedade que os caracteriza como bem arredondados, só acontece nos casos em que $\mathbb{K}$ é um corpo ciclotômico, [3].

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pela bolsa de modalidade-categoria Iniciação Científica - PICME e à minha orientadora, Profa. Dra. Carina Alves, pela ajuda e incentivo.

Referências

[1] J. Boutros, E. Viterbo, C. Rastello and J.C. Belfiore. Good lattice constellations for both Rayleigh fading and Gaussian channels, *IEEE Transactions Information Theory*, 42 (2): 502–517, 1996.

[2] L. Fukshansky. On similarity classes of well-rounded sublattices of $\mathbb{Z}^2$, *Journal of Number Theory*, 129 (10): 2530–2556, 2009.

[3] L. Fukshansky and K. Petersen. On Well-Rounded Ideal Lattices, *Journal of Number Theory*, 8 (1): 189–206, 2012.

[4] R. A. Mollin. *Algebraic Number Theory.* CRC Press, 2011.