Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estados estacionários de um sistema massa-mola não-linear com variação contínua da constante elástica

Laerty João dos Santos Damião[1]
Rafael Santos Thebaldi[2]
André Bicalho Messias Almeida[3]
Ítalo Rafael de Natal Campos[4]
Tainara Kesse da Silva[5]
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, UFOP, João Monlevade, MG

1 Introdução

O sistema massa-mola não-linear é um modelo inicialmente proposto para explicar efeitos não lineares que resultaram na queda da ponte Tacoma Narrows em 1940. Nesse modelo, uma tira elástica é adicionada em paralelo à mola de um sistema massa-mola amortecido, criando um sistema não-linear. Matematicamente, a dinâmica do deslocamento y, em função do tempo t, desse conjunto é descrita por:

$$my''(t) + \gamma y'(t) + F(y(t)) = f(t) \tag{1}$$

onde m é a massa, γ é a constante de amortecimento, $F(y(t)) = K(y(t))y(t)$ é a força exercida pela mola e pela tira elástica, cuja constante elástica efetiva é $K(y(t))$, e $f(t)$ é a força externa aplicada.

2 Modelagem e Resultados

Na nova modelagem do sistema, considerou-se uma constante elástica que varia de modo contínuo entre trechos constantes, ou seja,

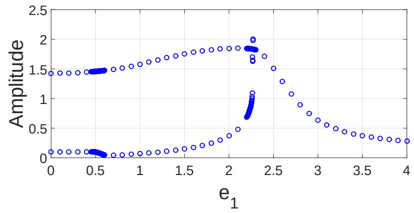
$$K(y(t)) = \begin{cases} k, & \text{se } y(t) < e_1 \leq 0, \\ k + b(y - e_1)/(e_2 - e_1), & \text{se } e_1 < y(t) \leq e_2, \\ k + b, & \text{se } y(t) > e_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

[1]laertyjs@gmail.com
[2]rafael@decea.ufop.br
[3]andrebicas.ab@gmail.com
[4]italocampos@yahoo.com.br
[5]tainarakesse@hotmail.com

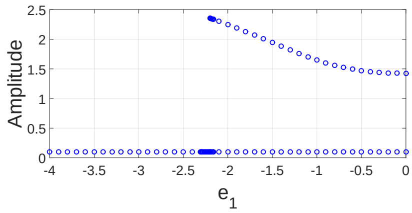
onde k é a constante da mola, b é a contante da tira elástica e e_1 e e_2 são parâmetros que determinam uma alteração de $K(y(t))$. Assim, os estados estacionários do sistema foram, computacionalmente, determinados variando a posição e velocidade iniciais nos intervalos $[-10, 10]$ e $[-20, 20]$, respectivamente. Os parâmetros $m = 1$, $\gamma = 0,01$, $k = 13$, $b = 4$ e $f(t) = 10 + 0,1\text{sen}(4t)$ foram mantidos fixos enquanto variou-se e_1 ou e_2. Humphreys e Shammas estudaram em [1] o mesmo sistema, porém com $e_1 = e_2 = 0$.

Os gráficos das figuras 1(a) e 1(b) mostram a amplitude de cada solução estacionária estável, em função de e_1, para os casos em que $e_2 = -e_1$ e $e_2 = 0$. A figura 1(c) mostra a amplitude, em função de e_2, para o caso em que $e_1 = 0$. Já a figura 1(d) mostra o mapeamento dos estados estacionários do sistema com $e_1 = 0$ e $e_2 = 0,01$.

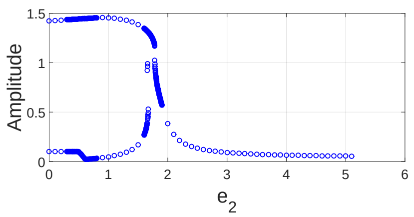
Dessa forma, observa-se que a amplitude e a existência de um ou dois estados estacionários está diretamente relacionada à variação da constante elástica efetiva da mola e que, dentro de uma configuração específica de parâmetros que possibilite dois estados, a estabilização do sistema em um deles é dependente da posição e velocidade iniciais.



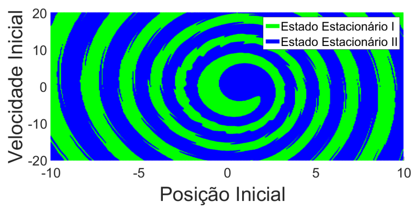
(a) Amplitude, em função de e_1, para $e_2 = -e_1$.



(b) Amplitude, em função de e_1, para $e_2 = 0$.



(c) Amplitude, em função de e_2, para $e_1 = 0$.



(d) Mapeamentos dos estados estacionários.

Figura 1: Dependência da amplitude das oscilações em relação aos parâmetros de $K(y(t))$ e mapeamento dos estados no plano velocidade inicial *versus* posição inicial.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e à Universidade Federal de Ouro Preto pelo apoio financeiro e suporte que possibilitaram a realização deste trabalho.

Referências

[1] L. D. Humphreys and R. Shammas, Finding Unpredictable Behavior in a Simple Ordinary Differential Equation, *The College Mathematics Journal*, 31:338–346, 2000. DOI: 10.2307/2687447.