

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

# Balanco Harmônico do Modelo de LuGre Suavizado

Luccas Pereira Miguel<sup>1</sup>  
 Rafael de Oliveira Teloli<sup>2</sup>  
 Samuel da Silva<sup>3</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, SP

## 1 Motivação

A histerese é um fenômeno de grande interesse da engenharia. Na literatura, existem modelos capazes de modelá-la, como o de Bouc-Wen e o de LuGre. Devido à complexidade do fenômeno e dos modelos, trabalhar com histerese ainda traz desafios, como a identificação de parâmetros baseada em dados experimentais. Uma alternativa é buscar respostas analíticas para o sistema em função de seus parâmetros e compará-las com os dados obtidos [3]. Porém, a obtenção destas respostas em modelos não suaves não é uma tarefa trivial. Neste contexto, este trabalho busca soluções aproximadas para o modelo de LuGre utilizando o balanço harmônico (HBM) de seus componentes por aproximação em séries. No entanto, uma vez que o modelo de LuGre tem uma forte descontinuidade, este trabalho também propõe uma forma de suavização dividindo-o em regiões para permitir o uso do HBM.

## 2 O Balanço Harmônico do Modelo de LuGre

O modelo de LuGre, utilizado nesse trabalho com os parâmetros da Tabela 1, foi inicialmente proposto para modelar atrito [4], porém também tem sido utilizado para descrever o fenômeno de histerese [2], por meio da força não linear:

$$\mathcal{F} = \sigma_0 \mathcal{Z} + \sigma_1 \dot{\mathcal{Z}} + \sigma_2 \dot{x} \quad (1)$$

$$\dot{\mathcal{Z}} = \dot{x} - \sigma_0 \frac{|\dot{x}|}{\mathcal{G}(\dot{x})} \mathcal{Z} \quad (2)$$

$$\mathcal{G}(\dot{x}) = \mathcal{F}_c + (\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_c) e^{-\left[\frac{\dot{x}}{V_s}\right]^2} \quad (3)$$

Devido à não suavidade, a aplicação do HBM no LuGre não é trivial. Uma alternativa, é o uso de operadores que lidem separadamente com os ciclos de carregamento e descarregamento da histerese [1]. Segundo o teorema de Weierstrass, se  $f(x)$  é uma função real contínua definida em um intervalo  $[a, b]$  e, se existe um erro de aproximação  $\epsilon > 0$ , então existirá um polinômio  $P(x)$  em  $[a, b]$  tal que:

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \forall x \in [a, b] \quad (4)$$

<sup>1</sup>lucasp.miguel@gmail.com

<sup>2</sup>teloli.r@gmail.com

<sup>3</sup>sam.silva13@unesp.br

Seno assim, as funções  $\mathcal{H}_c(x)$ , de carregamento, e  $\mathcal{H}_d(x)$ , de descarregamento, são limitadas entre  $[x_{\min}, x_{\max}]$  e portanto, podem ser aproximadas separadamente por polinômios de terceiro grau, como foi utilizado neste trabalho. Os polinômios obtidos são então unidos em uma série de Fourier, possibilitando aplicar o HBM na equação suave resultante. Com o procedimento descrito, obteve-se a aproximação da histerese vista na Figura 1:

Tabela 1: Parâmetros usados na simulação numérica.

$m$ [kg]	$k$ [N/m]	$\sigma_0$ [N/m]	$\sigma_1$ [Ns/m]	$\sigma_2$ [Ns/m]	$\mathcal{F}_c$ [N]	$\mathcal{F}_s$ [N]	$V_s$ [m/s]
1	2	$10^5$	$\sqrt{10^5}$	0.4	1	1.5	0.001

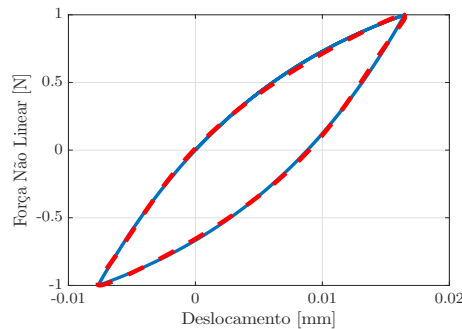


Figura 1: Aproximação do laço de histerese por balanço harmônico gerado por uma excitação  $u = \sin(0.1t)$ , sendo — a curva obtida por integração numérica, e - - a curva obtida pela aproximação sugerida neste artigo.

### 3 Considerações Finais

Neste trabalho foi possível observar a aplicação de uma alternativa para lidar com modelos com histerese por aproximações analíticas. Deve-se observar também que a abordagem não é útil apenas para a aplicação do HBM, mas também para outras aproximações que encontrem na não suavidade um desafio, como por exemplo, usando os métodos *harmonic probing* ou múltiplas escalas.

### 4 Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPESP ao processo 2016/21973-5 e ao PIBIC/CNPq e ao CNPq ao processo 307520/2016-1.

### Referências

- [1] GIRI, F. et al. Combined frequency-prediction error identification approach for wiener systems with backlash and backlash-inverse operators. *Automatica*, Elsevier, v. 50, n. 3, p. 768-783, 2014. DOI: 10.1016/j.automatica.2013.12.030.
- [2] MARTINS, S. A. M. Modelos Auto regressivos para Representação de Sistemas com Histerese. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- [3] SILVA, S. d. et al. Metrics for nonlinear model updating in structural dynamics. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 31, n. 1, p. 27-34, 2009. DOI: 10.1590/s1678-58782009000100005.
- [4] WIT, C. C. D. et al. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 40, n. 3, p. 419-425, 1995. DOI: 10.1109/9.376053.